

Tempa vojaĝo kaj geodezioj en ĝenerala relativeco

Time travel and geodesics in general relativity

F.M. Paiva

Departamento de Física, Unidade Humaitá II, Colégio Pedro II
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

13-a de aprilo, 2011

Resumo

Ĉe la Ĝenerala Relativeco, en homogena metriko de Som-Raychaudhuri, ni studas geodeziojn de la tri tipoj: tempa, nula, kaj spaca, speciale la malmulte konatajn samtempajn geodeziojn. Ni ankaŭ studas ne-geodezian cirklan movadon kun konstanta rapido, speciale fermitajn kurbojn de tempa tipo, kaj movadon de vojaĝanto al estinto.

In the homogeneous metric of Som-Raychaudhuri, in general relativity, we study the three types of geodesics: timelike, null, and spacelike; in particular, the little known geodesics of simultaneities. We also study the non-geodesic circular motion with constant velocity, particularly closed timelike curves, and time travel of a voyager.

1 Enkonduko

Ĉu estas ebla, ke vojaĝanto revenas al deirpunkto en antaŭa momento? Teknike dirante: ĉu kauza malobeo estas ebla? Newtona mekaniko respondas *ne*, sed Ĝenerala Relativeco diras *jes*. Ŝajnas ke Gödel [1] unue priskribis sistemon kun tio ebleco. Aliaj fizikaj sistemoj, nomitaj modeloj de Gödela tipo, estis poste studitaj. En ili, la materio povas reveni al estinto, sed havante kelkan ne-gravitan akcelon. Do ĝia movado estus *ne-geodezia*.

Ĉi tiu artikolo studas geodeziajn kaj ne-geodeziajn movadojn en speciala modelo de Gödela tipo: la universo de Som-Raychaudhuri [2]. Ni priskribas la geode-

1 Introduction

Is it possible that a voyager comes back to the starting point in a moment prior to his departure? In technical terms: is causality violation possible? Newtonian mechanics answers *no*, but general relativity says *yes*. It seems that Gödel [1] first described a system with that possibility. Other physical systems, called Gödel-type models, were later studied. In these studies, matter can travel to the past, but having some non-gravitational acceleration. So its motion would be *non-geodesic*.

This article studies geodesic and non-geodesic motions in a particular Gödel-type model: the universe of Som-Raychaudhuri [2]. We describe the three types of geodesics: time-

ziojn de la tri tipoj. Grava speciala okazo de spaca tipo estas priskribita: la samtempajn geodeziojn, konsistanta el samtempajn najbarajn eventojn, nure. Ni plue montras ke ĉiu geodezia movado de materio aŭ lumo obeas kauzecon. Speciala klaso de negeodezia movado estas poste studita, prezentante movadojn kun reveno al estinto.

La lineelemento de Som-Raychaudhuri estas skribita en la formo [2]

$$\epsilon(ds)^2 = [cdt - (\Omega r^2/c)d\varphi]^2 - (dr)^2 - r^2(d\varphi)^2 - (dz)^2, \quad (1)$$

kie $\epsilon = +1, 0, -1$ por intervaloj de tempa tipo, aŭ nula, aŭ spaca, respektive. Laŭ la ĝenerala relativeco, la materio rilata al tiu metriko estas elektrizita polvo, kun unuformaj masdenso kaj ŝargedenso. La polvo restas relative al la spaca teksaĵo, kaj la Lorentza forto en iu polvo estas nula.

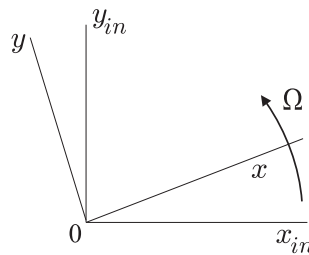
Ĉar $g_{00} = 1$, la koordinathorloĝoj estas normhorloĝoj. La kinematika parametro de rotacio valoras Ω , kaj estas spactempe konstanta. Do, najbare al origino, la spaca teksaĵo $[r, \varphi, z]$ rotacias kun angula rapido $\Omega = \text{konst}$ ĉirkaŭ akso z , relative al inercia kompas. Ni supozas $\Omega > 0$, implicante rotacion de teksaĵo en malhora direkto, kiel figuro 1 montras. Tamen, tiu elekto ne implicas fizikan limigon.

like, null, and spacelike. An important special case of spacelike geodesic is described: the geodesics of simultaneities, consisting on simultaneous neighbor events, only. We further show that geodetic motions of matter or light satisfy causality. Then we study a special class of non-geodetic motions, and present motions of matter with time travel.

The line element of Som-Raychaudhuri is written in the form [2]

where $\epsilon = +1, 0, -1$ for timelike, or null, or spacelike intervals, respectively. According to general relativity, the matter related to this metric is electrically charged dust, with uniform densities of matter and charge. The dust is at rest in the spatial frame, and the Lorentz force upon each dust grain is null.

Since $g_{00} = 1$, the coordinate clocks are standard clocks. The kinematic parameter of rotation is Ω , and is constant in all space-time. So, in the vicinity of the origin, the spatial frame $[r, \varphi, z]$ rotates with angular velocity $\Omega = \text{konst}$ around the z -axis, relative to a compass of inertia. We assume $\Omega > 0$, which implies rotation of the frame in anticlockwise direction, as figure 1 shows. However, that choice does not imply loss of physical generality.



Figuro 1: Ĉirkaŭ la origino, la spaca teksaĵo de Som-Raychaudhuri $[x, y]$ rotacias kun angula rapido Ω relative al spaca teksaĵo $[x_{in}, y_{in}]$, en malhora direkto.

Figura 1: Near the origin, the spatial frame of Som-Raychaudhuri $[x, y]$ rotates with angular velocity Ω relative to an inertial frame $[x_{in}, y_{in}]$, in the anticlockwise direction.

En la sekvanta sekcio ni komencas solvi geodeziajn ekvaciojn. En sekcio 3 ni studas geodeziojn (helicojn) de la tri tipoj, ĉirkaŭ la akso z , kaj en 4 la samtempajn geode-

In the next section we start solving the geodetic equations. In section 3 we study geodesics (helices) of the three types, around the z -axis, and in section 4 the (straight)

ziojn (rektajn). En sekcio 5 ni studas cirklajn movadojn de vojaĝanto al sia pasinto. Kaj en 6 ni konkludas kaj prezentas interesajn faktojn. Sekve ni difinas kelkajn utilajn kvantojn, detalotajn en [4].

Distanco inter du najbaraj punktoj en spaca teksaĵo:

geodesics of simultaneities. In section 5 we study circular motions of a voyager towards his past. And in 6 we conclude and present interesting facts. In the following we define some useful quantities, to be detailed in [4].

Distance between two neighbor points in the spatial frame:

$$dL := \sqrt{(g_{0i}g_{0j}/g_{00} - g_{ij})}dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Ĝi nuliĝas se kaj nur se la punktoj koincidas.

Intertempo do evento x^μ para o evento $x^\mu + dx^\mu$:

It is null if and only if the points coincide.

Intertime (interval of time) from event x^μ to the event $x^\mu + dx^\mu$:

$$dT := g_{0\mu} dx^\mu / (c\sqrt{g_{00}}). \quad (3)$$

Se la intervalo dx^μ estas de tempa tipo (aŭ nula) kaj dT estas pozitiva, tiuokaze objekto (aŭ lumo) povas iri de x^μ al $x^\mu + dx^\mu$. Se tamen dT estas malpozitiva, la movado de objekto (aŭ lumo) estos de $x^\mu + dx^\mu$ al x^μ . Se dx^μ estas spaca, dT indikas la tempan ordon de eventoj por inercia observanto fiksata en la spaca teksaĵo en x^μ .

Ni faru rimarkon pri propra intertempo. Atentu ke $(ds)^2$ estas difinata per linelemento (1), sed la signumo de ds ne estas fiksata. Por $ds \neq 0$, ni interkonsentas

If the interval dx^μ is timelike (or null) and dT is positive, then an object (or light) can go from event x^μ to the event $x^\mu + dx^\mu$. If however dT is negative, the motion of the object (or light) will be from event $x^\mu + dx^\mu$ to the event x^μ . If dx^μ is spacelike, then dT gives the temporal order of the events for an inertial observer fixed in the spatial frame in x^μ .

Let us make a remark about proptime interval. See that $(ds)^2$ is defined in the line element (1), but the signal of ds is not fixed. For $ds \neq 0$, we agree

$$dT/ds \geq 0. \quad (4)$$

Speciale, en movadoj de tempa tipo $(ds)/c$ estas la intervalo $d\tau$ de pasita propratempo, do s pligrandiĝas dum la movado.

Rapido inter x^μ kaj $x^\mu + dx^\mu$:

In particular, in the timelike motions $(ds)/c$ is the interval $d\tau$ of elapsed proptime, so s increases in the motion.

Velocity between x^μ and $x^\mu + dx^\mu$:

$$V := dL/|dT|. \quad (5)$$

Oni konstatas ke $V < c$ se kaj nur se dx^μ estas de tempa tipo.

Difinoj (2) kaj (3) implicas

One finds that $V < c$ if and only if dx^μ is timelike.

The definitions (2) and (3) imply

$$\epsilon(ds)^2 = (cdT)^2 - (dL)^2, \quad (6)$$

same kiel en speciala relativeco. Do dT , dL kaj V estas, respektive, intertempo, distanco

exactly as in special relativity. So dT , dL and V are respectively time interval, distance and

kaj rapido, rilataj al movado de objekto (se $V < c$), en inercia referencsistemo restanta relative al la spaca teksaĵo, en evento x^μ ; alivorte, inercia referencsistemo fiksata al spaca teksaĵo en tiu punkto kaj en tiu momento.

Por la metriko de Som-Raychaudhuri, la distanco kaj la intertempo estas

velocity related to the motion of an object (if $V < c$), in an inertial reference system at rest relative to the spatial frame, in the event x^μ ; in other words, an inertial reference system fixed in the spatial frame in that point and in that moment.

For the metric of Som-Raychaudhuri, the distance and the intertime are

$$dL = \sqrt{(dr)^2 + (rd\varphi)^2 + (dz)^2}, \quad dT = dt - (\Omega r^2/c^2)d\varphi. \quad (7)$$

2 Ekvacioj de geodezioj

Linielemento (1) ne dependas de t, φ, z . Do la respondaj kovariantaj komponoj de la kvarrapido $u^\mu := dx^\mu/ds$ estas konstantaj, en geodezia movado: $u_0 = \eta$, $u_\varphi = -\beta$, $u_z = -\zeta$. Uzante $u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu$, rezultiĝas

$$\eta = cdt/ds - (\Omega r^2/c)d\varphi/ds, \quad (8)$$

$$-\beta = (-\Omega r^2/c)(cdt/ds) - (r^2 - \Omega^2 r^4/c^2)d\varphi/ds, \quad (9)$$

$$-\zeta = -dz/ds. \quad (10)$$

Atentu ke (7b) kaj (8) implicas

See that (7b) and (8) imply

$$\eta = cdT/ds. \quad (11)$$

Konsekvence, konvencio (4) implicas $\eta \geq 0$.

Per rearanĝoj en (8)–(10), okazas

Consequently, convention (4) implies $\eta \geq 0$.

Rearranging (8)–(10), results

$$cdt/ds = \beta\Omega/c + \eta(1 - \Omega^2 r^2/c^2), \quad (12)$$

$$d\varphi/ds = \beta/r^2 - \eta\Omega/c, \quad (13)$$

$$dz/ds = \zeta. \quad (14)$$

Por havi dr/ds , ni metas (12)–(14) en linielemento (1), ricevante

To have dr/ds , we insert (12)–(14) in the line element (1), obtaining

$$(dr/ds)^2 = \mu^2 - r^2 \left(\frac{\beta}{r^2} - \frac{\eta\Omega}{c} \right)^2, \quad \mu := \sqrt{\eta^2 - \zeta^2 - \epsilon}. \quad (15)$$

Ĉar $\mu^2 = (dr/ds)^2 + r^2(d\varphi/ds)^2$, μ estas nula nur en movado paralela al la akso z .

Nun ni komencas integri (12)–(15). Unue ni kombinas (13) kun (15), ricevante

Since $\mu^2 = (dr/ds)^2 + r^2(d\varphi/ds)^2$, μ is null only in motions parallel to the z -axis.

Now we start integrating (12)–(15). We first combine (13) with (15), obtaining

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \mu^2 \left(\frac{\beta}{r^2} - \frac{\eta\Omega}{c}\right)^{-2} - r^2. \quad (16)$$

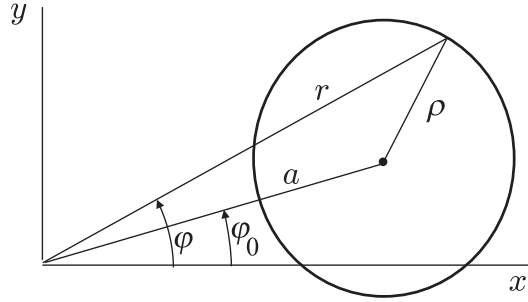
La solvoj de (16) estas cirkloj,

The solutions of (16) are circles,

$$r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi_0) = \rho^2, \quad \rho := \frac{c\mu}{2\eta\Omega}, \quad a := \sqrt{\rho^2 + \frac{c\beta}{\eta\Omega}}, \quad (17)$$

kie a kaj φ_0 estas respektive radiusa kaj angula pozicio de la cirkla centro, kaj ρ estas la radiuso, kiel figuro 2 montras. Ĉar μ en (15b) ne dependas de β , ankaŭ la radiuso ρ ne dependas.

where a and φ_0 are respectively the radial and angular positions of the center of the circle, and ρ is the radius, as figure 2 shows. Since μ in (15b) does not depend on β , neither the radius ρ depends.



Figuro 2: La cirklo (17) por okazo $a > \rho$. La cirklo estas orta projekcio de geodezia trajektorio, en ebena $z = \text{konst}$.

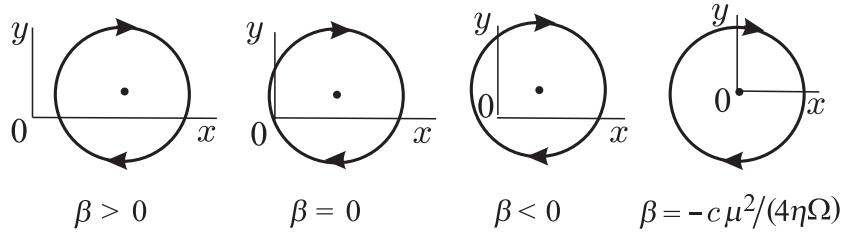
Figure 2: The circle (17) for the case $a > \rho$. It is the orthogonal projection of the geodetic trajectory in a plane $z = \text{const}$.

Do ĉiu geodezia trajektorio estas desegnata en cirkla cilindro kun radiuso ρ kaj akso paralela al akso z , je distanco a . Tio estas montrata en figuro 2 por $a > \rho$, ekvivalente $\beta > 0$. Figuro 3 montras aliajn okazojn, por kelkaj valoroj de β . Se $\beta = 0$, tial $a = \rho$, kaj la trajektorio krucas la akson z . Se $\beta < 0$, la cilindro ĉirkaŭfermas la akson. En speciala okazo $\beta = -c\mu^2/(4\eta\Omega)$, okazas $a = 0$, tio estas, la akso de cilindro estas la akso z .

Oni konstatas ke la kalkuloj de geodezioj kun $a = 0$ estas tre simplaj. Ili estas faritaj en la sekvanta sekcio. Ĉar [7] montris ke la linielemento (1) estas spactempe homogenaj, ni povas forkonduki geodeziojn kun $a = 0$ al iu regiono de spactempo. Sekcio 4 studos malkune la interesan okazon $a \rightarrow \infty$.

So every geodetic trajectory is drawn in a circular cylinder with radius ρ and axis parallel to the z -axis, at a distance a . This is shown in figure 2 for $a > \rho$, equivalently $\beta > 0$. Figure 3 shows other cases, for some values of β . If $\beta = 0$, then $a = \rho$, and the trajectory crosses the z -axis. If $\beta < 0$, the cylinder encircles the axis. In the special case $\beta = -c\mu^2/(4\eta\Omega)$, it occurs $a = 0$, that is, the axis of the cylinder is the z -axis.

One finds that calculation of geodesics with $a = 0$ are very simple. They are made in the next section. Since [7] shew that the line element (1) is homogeneous in all spacetime, we can carry geodesics with $a = 0$ to any region of spacetime. Section 4 will study separately the interesting case $a \rightarrow \infty$.



Figuro 3: Orta sekcio de cirkla cilindro subtenante geodezian trajektorion. La pozicio de la cilindra akso relative al akso z (tra origino 0) pendas de β . Sago indikas direkton de pligrandiĝo de T en geodezio.

Figura 3: Orthogonal section of the circular cylinder that bears a geodesic trajectory. The position of cylinder's axis relative to the z -axis (through origin 0) depends on β . Arrows show the direction of increase of T in the geodesic.

3 Geodezio kun $a = 0$

Farante $a = 0$, $r = \rho = \text{konst}$, kaj $\beta = -c\mu^2/(4\eta\Omega)$ en (12)–(14), ni ricevas

3 Geodesic with $a = 0$

Setting $a = 0$, $r = \rho = \text{const}$, and $\beta = -c\mu^2/(4\eta\Omega)$ in (12)–(14), we get

$$\frac{cdt}{ds} = \frac{\eta^2 + \zeta^2 + \epsilon}{2\eta}, \quad \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{2\eta\Omega}{c}, \quad \frac{dz}{ds} = \zeta. \quad (18)$$

Ĉar la kvociento $dz/d\varphi$ estas konstanta, ni konstatas ke la paŝo de la cirkla helica trajektorio estas konstanta.

La malpozitiva signumo en (18b) implicas ke la geodezia parametro s pligrandiĝas en la direkto anti- Ω . Do (4) diras ke la tempa parametro T ankaŭ pligrandiĝas en la direkto anti- Ω . Tio estas jam indikita en figuro 3.

Ni integras (18b) farante φ variu de 0 al -2π kaj ricevas Δs , la pligrandiĝon de s dum unu kompleta helicero. Poste, uzante (18a) kaj (18c) ni ricevas Δt kaj Δz akumulitaj en unu helicero:

Since the quotient $dz/d\varphi$ is constant, we see that the pitch of the circular helical trajectory is a constant.

The negative sign in (18b) implies that the geodesic parameter s increases in the anti- Ω direction. Then (4) says that also the time parameter T increases in the anti- Ω direction. This was already indicated in figure 3.

We integrate (18b) with φ varying from 0 to -2π and get Δs , the increase of s in a complete spire. Then, using (18a) and (18c) we find Δt and Δz accumulated in one complete spire:

$$\Delta\varphi = -2\pi, \quad \Delta s = \frac{\pi c}{\eta\Omega}, \quad \Delta t = \frac{\pi}{2\Omega} \left(1 + \frac{\epsilon + \zeta^2}{\eta^2} \right), \quad \Delta z = \frac{\pi\zeta c}{\eta\Omega}. \quad (19)$$

Por kompleti la priskribon de ĉi tiuj geodezioj, ni uzas (17b) por ricevi la radiuson de la cirkla helico,

To complete the description of these geodesics, we use (17b) to have the radius of the circular helix,

$$\rho = \frac{c}{2\Omega} \sqrt{1 - \frac{\epsilon + \zeta^2}{\eta^2}}. \quad (20)$$

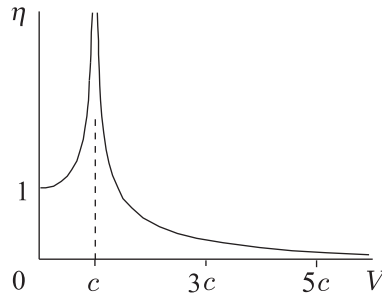
Por prezenti pli klaran priskribon, ni substituas parametrojn η kaj ζ kun aliaj pli familiaraj. Uzante (6) kaj (11) ni ricevas la rapidon V , difinita en (5), kiel funkcio de η , kaj ĝian inverson, montritan en figuro 4:

In order to present a more clear description, we replace the parameters η and ζ by other more familiar. Using (6) and (11) we obtain the velocity V , defined in (5), as a function of η , and its inverse, shown in figure 4:

$$V/c = \sqrt{1 - \epsilon/\eta^2}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{\epsilon(1 - V^2/c^2)}}; \quad (21)$$

atentu ke V estas konstanta.

see that V is constant.



Figuro 4: Rilato (21) inter parametroj η kaj V .

Figura 4: Relation (21) between parameters η and V .

Ni uzas ankaŭ la angulon $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, inter la orientita trajektorio kaj ebenaĵo $z = \text{konst}$:

We use also the angle $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, between the directed trajectory and planes $z = \text{const}$:

$$\tan \alpha := dz / \sqrt{(dr)^2 + (r d\varphi)^2}. \quad (22)$$

Ĉar ĉi tie $r = \text{konst}$, tial $\tan \alpha := dz / |\rho d\varphi|$. Uzante la geodeziajn ekvaciojn (18b,c), kaj (20)–(22), ni ricevas

Since here $r = \text{const}$, then $\tan \alpha := dz / |\rho d\varphi|$. Using the geodesic equations (18b,c), and (20)–(22), we get

$$\zeta = \frac{\eta V}{c} \sin \alpha. \quad (23)$$

Do, uzante parametroj V kaj α , la varioj (19) en unu kompleta helico kaj la radiuso (20) reskribiĝas

So, using parameters V and α , the variations (19) in one complete spire and the radius (20) rewrite

$$\Delta\varphi = -2\pi, \quad \Delta s = \frac{\pi c}{\Omega} \sqrt{\epsilon(1 - V^2/c^2)}, \quad \Delta t = \frac{\pi}{\Omega} (1 - \frac{V^2}{2c^2} \cos^2 \alpha), \quad \Delta z = \frac{\pi V}{\Omega} \sin \alpha, \quad (24)$$

$$\rho = \frac{V}{2\Omega} \cos \alpha. \quad (25)$$

Ekvacioj (25) kaj (24d) diras ke la radiuso ρ kaj la paŝo $|\Delta z|$ de helico pendas

Equations (25) and (24d) say that the radius ρ and helix's pitch $|\Delta z|$ depend linearly on

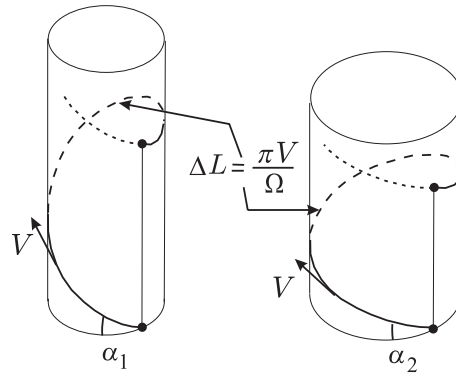
lineare de la konstanta rapido V ; sed ρ plietigās se $|\alpha|$ pligrandiĝas, kvankam $|\Delta z|$ pligrandiĝas. Integrante (7a) por unu kompleta helicro, poste uzante ekvaciojn (18) de geodezioj kaj (23) kaj (25), ni ricevas

$$\Delta L = \frac{\pi V}{\Omega}, \quad (26)$$

montrante ke la longo de helicro ne pendas de la klino α . Do trajektorio similas risorton. Fakte, premante risorton, la paŝo $|\Delta z|$ plietigās proporcie al pligrandiĝo de radiuso ρ . Tio permesas facile konstrui geodeziajn trajektoriojn kun sama proporcio V/Ω , kiel figuro 5 montras.

the constant velocity V ; but ρ shrinks if $|\alpha|$ increases, while $|\Delta z|$ increases. Integrating (7a) for a complete spire, then using equations (18) of the geodesics and (23) and (25), we obtain

showing that the length of a spire does not depend on the slope α . So a trajectory resembles a spring. Really, if we press a spring, the pitch $|\Delta z|$ shrinks proportionally to the increase of the radius ρ . This makes easy to construct geodesic trajectories with same ratio V/Ω , as figure 5 shows.



Figuro 5: Helicroj kun sama proporcio V/Ω havas la saman longon.
 Figura 5: Spires with same ratio V/Ω have the same length.

Ni kalkuku ankaŭ la intertempon $|\Delta T|$ en unu helicro. Ĉar V estas konstanta, tial $|\Delta T| = \Delta L/V$, tio estas,

$$|\Delta T| = \frac{\pi}{\Omega}. \quad (27)$$

Ni vidas ke $|\Delta T|$ pendas nek de V nek de α . Vere, $|\Delta T|$ estas la duono de la periodo $2\pi/\Omega$ de loka rotacio de spaca teksaĵo relative al la inercia kompaso.

En la tri sekvantaj subsekcioj, ni konsideras malkune geodeziojn de tempa tipo, nula tipo, kaj spaca tipo.

We calculate also the intertime $|\Delta T|$ within one spire. Since V is constant, then $|\Delta T| = \Delta L/V$, that is,

We see that $|\Delta T|$ depends neither on V nor on α . Really, $|\Delta T|$ is half the period $2\pi/\Omega$ of local rotation of the spatial frame relative to the compass of inertia.

In the next three subsections we consider separately the timelike, null, and spacelike geodesics.

3.1 Geodezio de tempa tipo

Ekvacio (25) montras ke la radiuso ρ de helico estas proporcia al rapido V , kaj ρ plietigas se la klino α pligrandiĝas. Plu, $\rho < c/(2\Omega)$. En ĉi tiu limo, la movado estas plana. Aliflanke, se la klino estas maksimuma ($|\alpha| = \pi/2$), do la radiuso ρ estas nula, kaj la movado okazas en akso z . Tiuokaze, se $\zeta = 0$ do $V = 0$, indikante objekton restantan en akso z . Kiel ni klarigis en sekcio 2, ni povas forkonduki ĉi tiun geodezion al iu regiono de spacotempo, do konstruante la geodeziojn de la polvo generanta graviton.

Ekvacio (24c) montras ke la intertempo Δt en unu kompleta helicro estas pozitiva, kaj valoras inter $\pi/(2\Omega)$ kaj π/Ω ; ĝi estas ju pli granda des malpli la rapido V estas granda, kaj des pli la trajektorio estas vertikala. Ni konstatas ke (24c) malpermesas kaŭzan malobeon en geodezioj de tempa tipo kaj nula tipo; ili ĉiam havas $\Delta t > 0$.

En geodezioj de tempa tipo kun $r = \text{konst}$, (12) indikas ke dt/ds estas konstanta. Sed en geodezioj kun $r \neq \text{konst}$, dt/ds ne nur estas malkonstanta, sed estas malpozitiva en regionoj kun r sufiĉe granda. Tio signifas ke vojaĝanto kun tiu movado renkontas valorojn de t sinsekve plietaj en tiuj regionoj. Tamen, en unu kompleta helicro, la pozitivaj kontribuoj de dt/ds en regionoj kun malgrandaj r superas tiujn malpozitivajn kontribuojn, okazante pozitivan rezulton por Δt .

La paŝo $|\Delta z|$ de helico en (24d) estas proporcia al la rapido V , kaj estas pli granda se la trajektorio estas pli vertikala; ĝia maksimuma valoro estas $\pi c/\Omega$.

La propra intertempo $\Delta\tau := (\Delta s)/c$ en unu kompleta helicro estas en (24b):

$$\Delta\tau = \frac{\pi}{\Omega} \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (28)$$

Ni konstatas ke $\Delta\tau$ ne pendas de la klino α . Ankaŭ ke, en unu kompleta helicro, la propra intertempo (28) estas plieta ol la intertempo (27). Efektive, $(c\Delta\tau)^2 = (c\Delta T)^2 - (\Delta L)^2$.

3.1 Timelike geodesic

Equation (25) shows that the radius ρ of the helix is linearly proportional to the velocity V , and is shorter if the slope α is greater. Further, $\rho < c/(2\Omega)$. In this limit, the motion is planar. On the other side, if the slope is maximum ($|\alpha| = \pi/2$), then the radius ρ is null and the motion is along the z -axis. In this case, if $\zeta = 0$ then $V = 0$, indicating an object at rest on the z -axis. As we clarified in section 2, we can transport this geodesic to any region of spacetime, thus constructing the geodesics of the dust generating gravitation.

Equation (24c) shows that the interval Δt of time coordinate in one complete spire is always positive, with value between $\pi/(2\Omega)$ and π/Ω ; it is larger if the velocity V is shorter, and if the trajectory is more vertical. We see that (24c) does not allow violation of causality in timelike and in null geodesics: these have always $\Delta t > 0$.

In timelike geodesics with $r = \text{const}$, equation (12) indicates that dt/ds is constant. But in geodesics with $r \neq \text{const}$, dt/ds not only varies, but is negative in regions with r sufficiently large. This means that a voyager with that motion finds values of local t successively shorter in these regions. However, in a complete spire, the positive contributions of dt/ds in regions with shorter r surpass the negative contributions from larger r , producing a positive result for Δt .

The pitch $|\Delta z|$ of the helix in (24d) is linearly proportional to the velocity V , and is greater if the trajectory is more vertical; its maximum value is $\pi c/\Omega$.

The proper intertime $\Delta\tau := (\Delta s)/c$ in a complete spire is in (24b):

We see that $\Delta\tau$ does not depend on the slope α . We see also that, in a complete spire, the proper intertime (28) is shorter than the intertime (27). Indeed, $(c\Delta\tau)^2 = (c\Delta T)^2 - (\Delta L)^2$.

3.2 Nula geodezio

Se $V = c$, (24)–(27) simpliĝas al

$$\Delta t = \frac{\pi}{2\Omega}(1 + \sin^2 \alpha), \quad \Delta z = \frac{\pi c}{\Omega} \sin \alpha, \quad \rho = \frac{c}{2\Omega} \cos \alpha, \quad \Delta L = \frac{\pi c}{\Omega}, \quad |\Delta T| = \frac{\pi}{\Omega}. \quad (29)$$

Ni konstatas ke la konstanta radiuso (29c) de luma helico estas malgranda se la klino $|\alpha|$ estas granda. Speciale, se $|\alpha| = \pi/2$, tial $\rho = 0$, kaj la movado de lumo estas en akso z . Aliflanke, la maksimuma diametro de helico estas $2\rho = c/\Omega$, okazanta se la movado estas plana. Do la horizonto de eventoj por iu observanto estas cilindra surfaco kun radiuso c/Ω , kies akso estas paralela al akso z kaj krucas la observanto [7].

Ekvacioj (29d) kaj (29e) prezentas la longon de luma helicro, kaj la intertempon por trakuri ĝin. Fine, (29a) montras ke en nulaj geodezioj ankaŭ ne estas kauza malobeo.

3.3 Geodezio de spaca tipo

Simile kiel en tempa kaj nula tipoj, la helicaĵoj movadoj de spaca tipo povas iĝi rektaj, en akso z . Aliflanke, ne estas limesa supremo por radiuso ρ , kiu estas proporcia al rapido V . Ekvacioj (24) kaj (25) permesas spac-tempe fermitajn geodeziojn ($\Delta t = 0$). Ili ankaŭ permesas $\Delta t < 0$, sed tio ne implicas kauan malobeon, ĉar kurbo de spaca tipo ne respondas al movado de materio nek de lumo.

La propra longo $\Delta\lambda := \Delta s$ de helicro de spaca tipo estas en (24b), kun $\epsilon = -1$:

$$\Delta\lambda = \frac{\pi c}{\Omega} \sqrt{V^2/c^2 - 1}. \quad (30)$$

Tio estas plieta ol la longo $\Delta L = \pi V/\Omega$ de helicro. Efektive, $(\Delta\lambda)^2 = (\Delta L)^2 - (c\Delta T)^2$.

3.2 Null geodesic

If $V = c$, (24)–(27) simplify to

We see that the constant radius (29c) of the light helix is short if the slope $|\alpha|$ is large. In particular, if $|\alpha| = \pi/2$, then $\rho = 0$, and the motion of light is along the z -axis. On the other side, the maximum diameter of a helix is $2\rho = c/\Omega$, occurring if the motion is planar. So the event horizon for any observer is a cylindrical surface with radius c/Ω , whose axis is parallel to the z -axis and crosses the observer [7].

Equations (29d) and (29e) give the length of a lightspire, and the intertime to traverse it. Finally, (29a) shows that neither in the null geodesics there is violation of causality.

3.3 Spacelike geodesic

Similarly as in the timelike and null motions, the spacelike helical can get straight, on the z -axis. On the other side, there is no upper limit for the radius ρ , which is linearly proportional to the velocity V . Equations (24) and (25) allow closed geodesics in spacetime ($\Delta t = 0$). They also allow $\Delta t < 0$, but this does not constitute causality violation, since a spacelike curve does not correspond to motion of matter or light.

The properlength $\Delta\lambda := \Delta s$ of a spacelike spire is in (24b), with $\epsilon = -1$:

This is shorter than the length $\Delta L = \pi V/\Omega$ of the spire. Indeed, $(\Delta\lambda)^2 = (\Delta L)^2 - (c\Delta T)^2$.

4 Samtempa geodezio

En elektata koordinatsistemo, samtempa geodezio estas tiu de spaca tipo ($\epsilon = -1$), kies intervaloj dx^μ havas intertempon dT nulan [3, 4], do rapido $V \rightarrow \infty$. Atentante (8) oni vidas ke $\eta \rightarrow 0$, kaj $V\eta/c \rightarrow 1$, kaj do (17) implicas radiuson $\rho \rightarrow \infty$ kaj distancon $a \rightarrow \infty$. Tamen, la troaĵo $|a - \rho|$ povas esti limhava, kiel ni supozas en ĉi tiu sekcio.

Ĉar $a \neq 0$, la rezultoj de sekcio 3 ne validas ĉi tie. Do ni reiras al sekcio 2. Uzante difinon de α en (22), kaj uzante (13)–(15), ni ricevas $\zeta = \sin \alpha$ kaj $\mu = \cos \alpha$. Difinante

$$D := \beta / \cos \alpha, \quad (31)$$

ni reskribas (12)–(15) kiel

$$\frac{dt}{ds} = \frac{D\Omega}{c^2} \cos \alpha, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{D}{r^2} \cos \alpha, \quad \frac{dz}{ds} = \sin \alpha, \quad \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = (1 - D^2/r^2) \cos^2 \alpha. \quad (32)$$

Ĉar $dT = 0$ en (6) implicas $|ds| = dL$, ekvacioj (32b,c,d) estas la bonkonataj ekvacioj de rekto en trispaco.

Fakte, ni kombinas (32b) kun (32d):

$$(d\varphi/dr)^2 = \frac{1}{r^2(r^2/D^2 - 1)}, \quad (33)$$

kies solvo estas

$$r \cos(\varphi - \varphi_0) = D, \quad \varphi_0 = \text{const}. \quad (34)$$

Kiel figuro 6 montras, tiu solvo estas rekto kies distanco al akso z estas $|D|$. Tiu rekto estas projekcio de geodezia trajektorio en ebenoj $z = \text{konst}$.

Ekvacio (32a) informas ke la vario de tempa koordinato t estas unuforma, laŭlonge la trajektorio. Kaj informas ke la legaĵoj de t ne varias, en movadoj paralelaj al akso z (tiuokaze $\alpha = \pm\pi/2$). Fine, komparante (32a) kun (32b), ni konstatas ke $d\varphi/dt > 0$.

4 Geod. of simultaneities

In a given coordinate system, geodesic of simultaneities is a spacelike geodesic ($\epsilon = -1$) whose infinitesimal intervals dx^μ have intertime dT null [3, 4], and so velocity $V \rightarrow \infty$. Remembering (8) one sees that $\eta \rightarrow 0$, and $V\eta/c \rightarrow 1$, so equations (17) imply radius $\rho \rightarrow \infty$ and distance $a \rightarrow \infty$. However, the difference $|a - \rho|$ can be finite, as we assume in this section.

Since $a \neq 0$, the results of section 3 do not apply here. We then come back to section 2. Using α defined in (22), and using (13)–(15), we obtain $\zeta = \sin \alpha$ and $\mu = \cos \alpha$. Defining

we rewrite (12)–(15) as

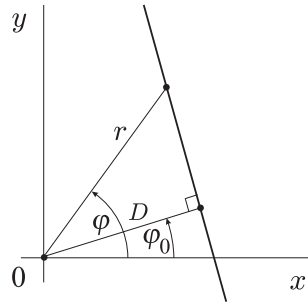
Since $dT = 0$ in (6) implies $|ds| = dL$, the equations (32b,c,d) are the well known equations of a straight line in threespace.

Indeed, we combine (32b) with (32d):

whose solution is

As figure 6 shows, this solution is a straight line whose distance to the z -axis is $|D|$. That line is the projection of the geodetic trajectory onto planes $z = \text{const}$.

Equation (32a) says that the variation of the time coordinate t is uniform, along the trajectory. It also says that the readings of t do not change, in motions parallel to the z -axis (cases where $\alpha = \pm\pi/2$). Finally, comparing (32a) with (32b), we see that $d\varphi/dt > 0$.



Figuro 6: Rekto (34); ĝi estas projekcio, en ebena $z = \text{konst}$, de arko de cirkla helico kun nefinia radiuso.

Figura 6: The straight line (34); it is the projection, on a plane $z = \text{const}$, of an arc of circular helix with infinite radius.

5 Reveno al estinto

Ni montris ke fermitaj trajektorioj de geodezioj de (1) estas cirkloj, kaj montris ke la direkto de movado estas mala al Ω . Ni montris ankaŭ ke neniuj geodezioj de tempa kaj nula tipo malobeas kauzecon. Nun ni montros ke (1) permesas vojaĝanton en ne-geodezia movado, neobeante kauzecon. Pro matematika simpleco, ni studas nur cirklaajn movadojn en ebena $z = \text{konst}$, centrigita en akso z kaj rapido $V = \text{konst}$.

Unue ni malkovras la direkton (Ω aŭ anti- Ω) de movado de vojaĝanto. Por tio, sufiĉas konsideri ekvaciojn

$$V = r|d\varphi/dT|, \quad (5)$$

$$1 = dt/dT - (\Omega r^2/c^2) d\varphi/dT. \quad (7b)$$

Kun r kaj V konstantaj, tiuj ekvacioj implicas konstantecon de $d\varphi/dT$ kaj dt/dT . Rememoru ke kauza malobeo postulas ke la sumo Δt de infinitezimoj dt estu malpozitiva, en kompleta turno de vojaĝanto. Ĉar $\Delta t/\Delta T = dt/dT$, kaj ĉar $\Delta T > 0$, tial $dt/dT < 0$. Do (7b) implicas $d\varphi/dT < 0$. Do, inercia observanto fiksata en spaca teksaĵo, najbare la trajektorio, asertas ke la direkto de movado de vojaĝanto estas anti- Ω .

Nun ni malkovras la rilaton inter r kaj V por ke estu kaŭza malobeo. Por tio, sufiĉas postuli $dt/dT < 0$ kaj $V = -rd\varphi/dT$ en (7b); ni ricevas la kondiĉon por malobeo

5 Time travel

We have shown that the closed trajectories of geodesics of (1) are circles, and that the direction of motion is opposed to Ω . We also have shown that no timelike or null geodesic violates causality. We now show that (1) allows a voyager in non-geodesic motion to violate causality. For mathematical ease, we study only circular motions in a plane $z = \text{const}$, centered in the z -axis and having velocity $V = \text{const}$.

We first find out the direction (Ω or anti- Ω) of motion of the voyager. For that, it suffices consider the equations

With r and V constant, these equations imply constancy of $d\varphi/dT$ and dt/dT . Remember that causality violation demands that the sum Δt of the infinitesimals dt be negative, in a complete turn of the voyager. Since $\Delta t/\Delta T = dt/dT$, and since $\Delta T > 0$, then $dt/dT < 0$. So (7b) implies $d\varphi/dT < 0$. So an inertial observer fixed in the spatial frame, near the trajectory, asserts that the direction of motion of the voyager is anti- Ω .

We now find out the relation between r and V so that there be causality violation. To that end, it suffices postulate $dt/dT < 0$ and $V = -rd\varphi/dT$ in (7b); we get the condition

$$Vr > c^2/\Omega. \quad (35)$$

Ni kalkulu Δt , la varion de koordinata tempo en unu kompleta turno. Ĝi estas

Let us calculate Δt , the variation of coordinate time in a complete turn. It is

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{V} \left(1 - \frac{\Omega r V}{c^2} \right), \quad (36)$$

ke klare estas negativa se kaŭzeco estas malobeata, vidu (35).

Ni kalkulas ankaŭ la propra intertempo $\Delta\tau$ de vojaĝanto, en unu kompleta turno. Ĉar $\Delta\tau = \Delta T \sqrt{1 - V^2/c^2}$, kaj ĉar $\Delta T = 2\pi r/V$, tial

which clearly is negative if causality is violated, see (35).

We calculate also the proper intertime $\Delta\tau$ of the voyager, in a complete turn. Since $\Delta\tau = \Delta T \sqrt{1 - V^2/c^2}$, and since $\Delta T = 2\pi r/V$, then

$$\Delta\tau = \frac{2\pi r}{V} \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (37)$$

Tiu rezulto koincidas kun tio de speciala relativeco.

This result coincides with that of special relativity.

6 Konkludo

Ĉar la sistemo de Som-Raychaudhuri estas homogena, izometra transformo forkondukas geodezion, de iu regiono de spacotempo al iu ajn regiono [8]. Speciale, rezultoj pri dL , dT kaj V estas nevariantaj per tiu transformo. Do, per simpla kalkulo, ni konstatis ke ĉiu geodezia trajektorio estas cirkla helico kun konstanta paŝo, kaj akso paralela al akso z . Ni konstatis ankaŭ ke la rapido V de movado estas konstanta, je direkto mala al Ω . La radiuso ρ de helico, la rapido V , kaj la angulo α de klino de geodezia trajektorio rilatas per (25), t.e. $\rho = (V/2\Omega) \cos \alpha$; tiu rilato klare postulas ekzisti maksimuma radiuso por geodezioj de tempa tipo.

Interesaj specialaj okazoj de helico estas: 1) Rekto en iu direkto, kaj nefinia rapido; ili estas la samtempaj geodezioj; 2) Rekto paralela al akso z , kun finia rapido; 3) Cirklo en ebena $z = \text{const}$; tiuokaze $\rho = V/(2\Omega)$. En ĉi tiu lasta okazo (cirklo), estas la eblecoj: 1) $\rho = 0$, por geodezio de tempa tipo de re-

6 Conclusion

Since the Som-Raychaudhuri system is homogeneous, an isometry transformation brings a geodesic from some region of spacetime to any other region [8]. In particular, results about dL , dT and V are invariant under that transformation. So, via a simple calculus, we saw that every geodetic trajectory is a circular helix with fixed pitch, and axis parallel to the z -axis. We also saw that the velocity V of the motion is constant, in the direction opposite to Ω . The radius ρ of the helix, the velocity V and the angle α of slope of the geodetic trajectory relate as (25), that is $\rho = (V/2\Omega) \cos \alpha$; this relation clearly implies existence of a maximum radius for timelike geodesics.

Interesting special cases of helix are: 1) Straight line in any direction, and infinite velocity; these are geodesics of simultaneities; 2) Straight line parallel to the z -axis, with finite velocity; 3) Circle in plane $z = \text{const}$, with radius $\rho = V/(2\Omega)$. In this last case (circle) there are the possibilities: 1) $\rho = 0$, for time-

stanta objekto, kiel la polvo de modelo; 2) $\rho < c/(2\Omega)$, por alia geodezio de tempa tipo; 3) $\rho = c/(2\Omega)$, por nula geodezio, tio estas, movado de lumo; 4) $\rho > c/(2\Omega)$, por geodezio de spaca tipo; 5) $\rho \rightarrow \infty$, por samtempa geodezio.

Ni montris ke geodezioj de (1) obeas kaŭzecon. Sed estas bonkonata[7] ke estas movadoj de akcelata materio kiuj neobeas. Serĉante tial movadojn, ni studis cirklon en ebena $z = \text{konst.}$ Ni montris ke nur movadoj kun direkto anti- Ω kaj $\rho > c^2/(V\Omega)$ malobeas kaŭzecon. Ĉi tiu minimuma radiuso estas la duoblo de maksimuma radiuso, $c/(2\Omega)$, por geodezio de tempa tipo.

Estas tre diskutita, akcepti modelon de universo permesanta vojaĝanto reveni al sia estinto. Meze de konsekvencoj de kaŭza malobeo, estas la perdo de libera volo. Estas ankaŭ malaj konkludoj, kiel tio rilata al direkto de movado. Fakte, vojaĝanto en *tournée* de reveno al estinto perceptas ke sia angula pozicio φ plietigās laŭ sia propratempo τ pligrandiĝas ($d\varphi/d\tau < 0$). Do, li asertas ke la direkto de sia movado estas anti- Ω . Ankaŭ inercia observanto fiksata en spaca teksaĵo, en punkto najbara al trajektorio, asertas ke la direkto de movado de vojaĝanto estas anti- Ω , poste vidi ke φ de vojaĝanto plietigās laŭ la propratempo τ_{obs} de observanto pligrandiĝas ($d\varphi/d\tau_{obs} < 0$).

Nun konsideru observanton restanta en centro de la cirklo, en $r = 0$. Li ne povas vidi rekte la movadon de vojaĝanto, ĉar la radiuso de la cirklo estas pligranda ol la diametro de geodeziaj trajektorioj de lumo, ke irus de vojaĝanto al observanto. Sed ni farigas ke imagoj de la movado estu sendataj al la centra observanto per optikaj fibroj radiuse etenditaj. Pro simetrio, la tempo de aliro de ĉiu imago de vojaĝanto al observanto estas la sama. Ĉar vojaĝanto en anti- Ω movado konstatas valorojn de t pli kaj pli etaj, kaj ĉar la koordinathorloĝoj estas sinkronaj al la centra horloĝo per radiusaj rektoj, tial

like geodesics of a body at rest, such as the dust of the model; 2) $\rho < c/(2\Omega)$, for other timelike geodesics; 3) $\rho = c/(2\Omega)$, for null geodesics, that is, motion of light; 4) $\rho > c/(2\Omega)$, for spacelike geodesics; 5) $\rho \rightarrow \infty$, for geodesics of simultaneities.

We have shown that geodesics of (1) do not violate causality. However, it is well known [7] that there are motions of accelerated matter that violate. Looking for such motions, we studied a circle in a plane $z = \text{const.}$ We have shown that only motions with anti- Ω direction and radius $\rho > c^2/(V\Omega)$ violate causality. This minimum radius is the double of the maximum radius, $c/(2\Omega)$, permissible for timelike geodesics.

It is very disputable, to accept a model universe that permits a voyager return to his past. Among the consequences of causality violation, is the loss of freedom of choice. There are also contradictory conclusions, such as the one related to the direction of motion. Indeed, a voyager in a *tournée* of return to the past sees his angular position φ diminishing while his proper time τ increases ($d\varphi/d\tau < 0$). So, he asserts that his direction of motion is anti- Ω . Also an inertial observer fixed in the spatial frame, in a point near the trajectory, asserts that the direction of motion of the voyager is anti- Ω , after seeing the position φ of the voyager diminishing while his proper time τ_{obs} increases ($d\varphi/d\tau_{obs} < 0$).

Now imagine an observer at rest in the center of the circle, in $r = 0$. He does not see directly the motion of the voyager, because the radius of the circle is greater than the diameter of the geodesic trajectories of light, that would go from the voyager to the observer. But we arrange that images of the motion be sent to the central observer using optical fibers, radially extended. By symmetry, the travelling time of each image from the voyager to the observer is the same. Since the voyager in anti- Ω motion sees values of coordinate time t decreasing more and more, and since these coordinate clocks are synchronous with the central clock

la centra observanto vidas vojaĝanto aliri kun $d\varphi/d\tau_{cen} > 0$, tio estas, en direkto Ω , laŭ la propratempo τ_{cen} de centra observanto pli-grandiĝas.

Tamen, se horloĝo de vojaĝanto estas filmata, la observanto vidas ke ĝi markas malantaŭen la tempon, kaj vidas vojaĝanton marŝante malantaŭen, kaj aŭdas lin paroli malantaŭen. Tiuj strangaj perceptoj avertas la centran observanton, ke $d\varphi/d\tau_{obs} > 0$ ne estas fidinda por aserti ke direkto de movado de vojaĝanto estas Ω .

Tiu paradoksa fakto estas klarigita se ni analizas la sinkronon de koordinathorloĝoj. En metriko (1), du koordinathorloĝoj fiksitaĵ en la sama duonebena $\varphi = \text{konst}$ estas sinkronaj per iu vojo en la duonebena, kiel (7b) kun $d\varphi = 0$ montras. Speciale, koordinathorloĝoj fiksitaĵ laŭlonge la cirkla trajektorio de vojaĝanto estas ĉiam sinkronaj al koordinathorloĝo de centra observanto en $r = 0$, per radiusaj vojoj. Tio ne implicas ke tiuj horloĝoj estas sinkronaj inter ili, per vojoj en la cirklo. Vere, ili ne estas. Konsideru du najbaraj horloĝoj; en sistemo kun $\Omega > 0$, la horloĝo kun plieta φ estas malfrua rilate la alia. Fakte, postulante samtempajn momentojn ($dT = 0$) al la horloĝoj, (7b) montras ke la horloĝo en plieta φ montras valoron $(\Omega r^2/c^2)d\varphi$ plieta ol de alia horloĝo. Do en unu kompleta turno en anti- Ω direkto, la akumulita malfruo estos $\Delta't := 2\pi\Omega r^2/c^2$.

Nun, pensu pri vojaĝanto kun tre malrapida cirkla movado ($V \ll c$), en anti- Ω direkto. Poste unu turno, li maljuniĝas $\Delta\tau \approx \Delta T = 2\pi r/V$. Sed loka tieulo maljuniĝas $\Delta t = \Delta T - \Delta't$, inter la du pasadoj de vojaĝanto. Tiu kvanto estas ordinare pozitiva, indikante maljuniĝo. Se tamen la rapido de vojaĝanto estas multe pli granda, tial ΔT estas multe plieta, kaj la malfruo $\Delta't$ estas la sama. Okazos $\Delta T < \Delta't$ se rapido de vojaĝanto obeas $Vr > c^2/\Omega$. Tiuokaze $\Delta t < 0$, indikante ke lokaj tieuloj juniĝis inter la du pasadoj.

by the radial paths, then the central observer sees the voyager moving with $d\varphi/d\tau_{cen} > 0$, that is, in the Ω direction, while the proper-time τ_{cen} of the central observer increases.

However, if the clock of the voyager is filmed, the central observer sees it counting the time backward, and sees the voyager walking backwards, and listens he speaking backward. These strange perceptions warn the central observer that $d\varphi/d\tau_{obs} > 0$ is not trustful to assert that the direction of voyager's motion is Ω .

This paradoxal fact is clarified if we analyze the synchronism of the coordinate clocks. In metric (1), two coordinate clocks fixed in a same half plane $\varphi = \text{const}$ are synchronous by any path in the half plane, as (7b) with $d\varphi = 0$ shows. In particular, the coordinate clocks fixed along the circular trajectory of the voyager are synchronous with the coordinate clock of the central observer in $r = 0$, by radial paths. This does not imply that these clocks are synchronous among themselves. In fact, they are not. Take two neighbor clocks; in the system with $\Omega > 0$, the clock with smaller φ is in retard relative to the other. Indeed, if we postulate simultaneous moments ($dT = 0$) to the clocks, (7b) shows that the clock with smaller φ is counting a time value $(\Omega r^2/c^2)d\varphi$ shorter than the other clock. So in a complete turn in the anti- Ω direction, the accumulated retard will be $\Delta't := 2\pi\Omega r^2/c^2$.

Now, think about a voyager with very slow ($V \ll c$) circular motion, in the anti- Ω direction. When he completes one turn, he will be $\Delta\tau \approx \Delta T = 2\pi r/V$ older. But a local inhabitant will live $\Delta t = \Delta T - \Delta't$, between the two passages. This quantity is usually positive, indicating aging. If however the velocity of the voyager is much greater, then ΔT is much smaller, while the delay $\Delta't$ is the same. It will occur $\Delta T < \Delta't$ if the velocity of the voyager satisfies $Vr > c^2/\Omega$. In this case it occurs $\Delta t < 0$, indicating rejuvenation of the local inhabitants between the two passages.

Citaĵoj

- [1] K. Gödel, *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation*, Rev. Mod. Phys. **21** 477-480 (1949).
- [2] M.M. Som, A.K. Raychaudhuri, *Cylindrically symmetric charged dust distributions in rigid rotation in general relativity*, Proc. R. Soc. A **304** 81-86 (1968).
- [3] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Samtempaj geodezioj ĉe Ŝvarcŝild / Geodesics of simultaneities in Schwarzschild*, arXiv:1006.4654; CBPF-NF-012/10.
- [4] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *La relativeca tempo – II / The relativistic time – II*, baldaŭ aperonta en arXiv[physics] / to appear soon in arXiv[physics].
- [5] J.L. Anderson, *Principles of relativity physics*, Academic Press (1967).
- [6] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Doppleraj efikoj ĉe Schwarzschild / Doppler effects in Schwarzschild*, arXiv:0912.1229; CBPF-NF-023/09.
- [7] F.M. Paiva, M.J. Rebouças, A.F.F. Teixeira, *Time travel in the homogeneous Som-Raychaudhuri universe*, Physics Letters A **126** 168-170 (1987).
- [8] F.M. Paiva, *O Universo de Som-Raychaudhuri, Geodésicas, Campos de Killing e Classificação invariante*, Tese de Mestrado CBPF (1988).