La relativeca tempo – II
The relativistic time – II

F.M. Paiva
Departamento de Física, Unidade Humaitá II, Colégio Pedro II
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br
A.F.F. Teixeira
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

8–a de julio, 2011

Resumo

La relativeca teorio montris ke pluraj Newtonaj ideoj pri la spacotempo estas malperfektaj. Tie ĉi ni prezentas kelkajn relativecajn konceptojn iel rilatajn al tiuj ideoj: samtempecon de eventoj kaj sinkronon de horloĝoj (ambaŭ laŭ linio en la spaca reto), gravitan Doppleran efikon, kaj vojaĝon kun reveno al estinto.

The theory of relativity showed that several Newtonian ideas about spacetime are imperfect. We present here some relativistic concepts related to these ideas: simultaneity of events and synchronization of clocks (both along a line in the space frame), gravitational Doppler effect, and time travel.

1 Enkonduko

Antaŭa artiklo [1] prezentis kelkajn fizikajn efikojn montrante ke la Newtona tempo malsimilas al la tempo de speciala relativeco (SR). Tie ni diskutis pri Dopplera efiko, ĝemel-paradokso, rotacio, rigida stango, kaj konstanta propra akcelo. Por tio ni koordenatigis la spacotempon per inercia referencosistemo. Tiu sistemo taŭgas por fiziko sen gravito. Tamen se gravito gravas, ni bezonas uzi koordinatsistemojn pli ĝeneralajn, kiel tiu ĉi artiklo priskribas.

Ni komence klarigas la koncepton de normhorloĝo, de propra intertempo, kaj de

1 Introduction

A former article [1] presented some physical effects showing that Newtonian time is different from special relativity (SR) time. There we discussed about Doppler effect, twin paradox, rotation, rigid rod, and constant proper acceleration. To that end we coordinatized spacetime using an inertial reference system. That system is suitable to physics without gravitation. However, if gravity is important, we need use systems of coordinates more general, as this article describes.

We initially clarify the concept of standard clock, of proper intertime, and of second; and sekundo; kaj ni emfazas la konstantecon de lumrapido en vakuo, en iu ajn gravito.

Normhorloĝo estas kiel altkvalita brakhorloĝo [1, Sek.1]. Ĉiuj normhorloĝoj estas *similaj*, tio signifante ke du apudaj normhorloĝoj montras la saman kadencon de fluo de iliaj tempoj. Tamen komence apudaj kaj sinkronaj normhorloĝoj, poste havante malsimilajn rapidon kaj graviton, estos probable nesinkronaj en okaza renkonto. En la renkonto, la du normhorloĝoj ankoraŭ montras la saman kadencon de fluo de iliaj tempoj.

Normhorloĝo montras la fluon de τ, sia *propratempo*. Konvena unueco de *propra intertempo* $\Delta\tau$ estas la *sekundo*, kiu pendas nek de la movado de normhorloĝo nek de ĝia pozicio en gravita kampo. Estas interkonsentita ke sekundo estas la intertempo de senerare 9.192.631.770 periodoj de specifita radiado el atomo de cezio. Vidu [2, paĝo 18] por detaloj.

Ankaŭ estas interkonsentita [2, paĝo 17] ke la rapido c de lumo en vakuo estas senerare 299.792.458 m/s. Konsekvence, *metro* estas moderne difinita kiel la distanco ke lumo trakuras en vakuo dum frakcio 1/299.792.458 de sekundo, senerare.

Tiu ĉi artiklo akordas Einstein [3], Landau-Lifshitz [4], Anderson [5], Synge [6], Misner-Thorne-Wheeler [7]. Tamen, malsamaj vidpunktoj ekzistas, kiel tiu de Tonkinson [8], ekzemple.

2 Koordinatoj

Pensu pri *finhava regiono* $\mathcal{R}^3$ de trispaco; kaverno, ekzemple, eble havante graviton. Tie ni etendas (formale) aron de dudimensiaj surfacoj, kiel grandaj kurtenoj, kaj ni orde etiketas ilin per reelaj nombroj x^1. Tiuj surfacoj ĝeneraligas la karteziajn ebenojn $x =$ konst de Euklida geometrio. Simile kiel tiuj ebenoj, surfacoj $x^1 =$ konst ne tuŝas unu la alian, kaj ilia aro plenigas regionon $\mathcal{R}^3$. Sed malsimile al karteziaj ebenoj, tiuj ĉi koordinatsurfacoj

we emphasize the constancy of light speed in vacuum, in any gravitation.

A *standard clock* is like a wrist watch of superior quality [1, Sect.1]. All standard clocks are *alike*, meaning that two of them, placed very close, show the same pace in the flow of their times. However, standard clocks initially neighbor and synchronous, and later submitted to different speeds and gravitation, will be probably not synchronous in an occasional reencounter. On reencounter, the two clocks still show the same pace in the flow of their times.

A standard clock shows the flow of τ, its *propertime*. A convenient unit of *proper intertime* $\Delta\tau$ is the *second*, that depends neither on the motion of the standard clock nor on its location in a gravitational field. It is postulated that second is precisely the duration of 9.192.631.770 periods of a specified radiation from atom of cesium. See [2, page 18] for details.

It is also postulated [2, page 17] that the speed c of light in vacuum is 299.792.458 m/s precisely. As a consequence, the *meter* is modernly defined as the distance that light travels in vacuum in the fraction 1/299.792.458 of a second, precisely.

This article goes with Einstein [3], Landau-Lifshitz [4], Anderson [5], Synge [6], Misner-Thorne-Wheeler [7]. However, different viewpoints exist, such as that of Tonkinson [8], for example.

2 Coordinates

Consider a *finite region* $\mathcal{R}^3$ of threespace; a cavern, for example, possibly with gravity. There, we lay (formally) a set of two-dimensional surfaces, like large curtains, and orderly label them with real numbers x^1. These surfaces generalize the cartesian planes $x =$ const of Euclidean geometry. Like these planes, the surfaces $x^1 =$ const do not touch one-another, and their set fills the entire region $\mathcal{R}^3$. But differently from these planes, *povas malformiĝi* laŭlonge la tempo.

Ni simile etendas (formale) aliajn du arojn de dudimensiaj surfacoj, kaj etiketas ilin per reelaj nombroj x^2 = konst kaj x^3 = konst. Tiuj ĉi surfacoj ĝeneraligas la karteziajn ebenojn y = konst kaj z = konst. Tiel, tridimensia *spaca reto* estas elektita por $\mathcal{R}^3$. Ĉiu punkto P de la reto rilatas neambigue al triopo $x^i = [x^1, x^2, x^3]$. Ĉar la reto povas malformiĝi laŭlonge la tempo, tial distanco inter punktoj de reto povas ankaŭ varii.

Poste, ni fiksas (formale) unu horloĝon $\mathcal{K}_P$ en ĉiu punkto P de la reto; ĝi estas la *koordinathorloĝo* de P, aŭ *loka horloĝo* de P. Ĉiu $\mathcal{K}_P$ montras valoron *ĉiam pliegantan* de nedimensia variablo t, la *tempa koordinato* en P. $\mathcal{K}_P$ ne estas normhorloĝo, ordinare. Intervalo Δt de loka tempa koordinato estas apenaŭ numero, sen unueco de intertempo (sed legu [9]). Ĉiu $\mathcal{K}_P$ havas sian kadencon de fluo de sia tempo t, kaj du koordinathorloĝoj ordinare ne estas sinkronaj, eĉ se ili estas najbaraj. Plu, ordinare estas malkonstanta, la rilato inter la fluo de t em $\mathcal{K}_P$ kaj la fluo de τ en normhorloĝo fiksita ĉe P.

Zorgo estas konsilinda, kiam ni altempigas ĉiun $\mathcal{K}_P$ en spaca reto: *najbaraj* lokaj horloĝoj devas montri valorojn de t ankaŭ najbaraj. Atentu, ke vojaĝanto en spaca reto povas renkonti serion de t pliegantan, aŭ senŝanĝantan, aŭ eĉ plietantan; Figuro 1 ekzemplas tiun eblecon.

Einstein nomis *molusko*, la spacotempan koordinatsistemon konstruitan kiel tie ĉi [10]. Kaj ni nomas *evento*, ion okazantan en konata punkto de spaco kaj en konata momento. En elektita molusko, evento E estas specifita per kvaropo $[\,t, x^1, x^2, x^3]$, aŭ ekvivalente per kvaropo $x^\mu := [x^0, x^i]$, estante $x^0 := ct$. Se ni elektas alian moluskon, la sama evento E estos specifita per alia kvaropo $x^{\mu'}$. Riskante negravan konfuzon kun t, ankaŭ x^0 estas nomita tempa koordinato de E.

Elekti moluskon, kiel ni ĵus faris, ne sufiĉas por priskribi kelkajn fizikajn varia-

these surfaces *may deform* along the time.

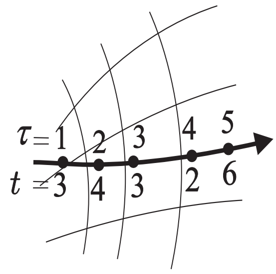
We similarly lay (formally) two other sets of two-dimensional surfaces, and label them with real numbers x^2 = const and x^3 = const. These surfaces generalize the cartesian planes y = const and z = const. Thus, a three-dimensional *spatial frame* was chosen for $\mathcal{R}^3$. Each point P in the frame corresponds unambiguously to a triplet $x^i = [x^1, x^2, x^3]$. Since the frame may deform along the time, the distance between points on the frame may also vary.

We next fix (formally) a clock $\mathcal{K}_P$ in each point P of the frame; it is the *coordinate clock* at P, or *local clock* at P. A $\mathcal{K}_P$ shows an *always increasing* value of a non-dimensional variable t, the *time coordinate* at P. A $\mathcal{K}_P$ is not a standard clock, in general. An interval Δt of local time coordinate is just a number, deprived of unity (but read [9]). Each $\mathcal{K}_P$ has its speed of flow of its time t, and two coordinate clocks usually are not synchronous, even if they are neighbor. Further, it is usually variable, the ratio between the flow of t in a $\mathcal{K}_P$ and the flow of τ in a standard clock fixed at P.

A care is worth advising, when we adjust each $\mathcal{K}_P$ in the spatial frame: *neighbor* local clocks should show also neighbor values of t. Note that a voyager in the spatial frame can find series of increasing t, or stationary, or even decreasing; Figure 1 exemplifies that possibility.

Einstein called *molusc*, the spacetime coordinate system built as here [10]. And we call *event*, something that happens in a known point of space and in a known moment. In a chosen molusc, an event E is specified with a quartet $[\,t, x^1, x^2, x^3]$, or equivalently with the quartet $x^\mu := [x^0, x^i]$, being $x^0 := ct$. If another molusc is chosen, the same event E is specified with another quartet $x^{\mu'}$. With unimportant risk of confusion with t, also x^0 is called time coordinate of E.

Choosing a molusc, as we just did, is not enough to describe certain physical variables.



Figuro 1: Normhorloĝo moviĝas en spaca reto. Ĝia propratempo ĉiam pligrandiĝas ($\tau = \ldots, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$), tamen la responda loka tempa koordinato ne ĉiam pligrandiĝas ($t = \ldots, 3, 4, 3, 2, 6, \ldots$).
Figure 1: A standard clock moves in the spatial frame. Its propertime is always increasing ($\tau = \ldots, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$), although the corresponding local time coordinate not always increases ($t = \ldots, 3, 4, 3, 2, 6, \ldots$).

blojn. Ekzemple, priskribo de vektoro aŭ tensoro en evento E bezonas *vektoran bazon* en E. Ĉiu bazo taŭgas por specifi *komponojn* de vektoro aŭ tensoro. Konvenas ke bazoj en najbaraj eventoj malsimilu apenaŭ infinitezime. Tie ĉi ni uzos nur la plej bonkonatajn bazojn, la *koordinatbazojn*, kaj iliajn dualajn [11, paĝo 80]. Tiuj bazoj estas kreitaj ekde koordinatoj, sole. Tiel, ekde nun, la vorto molusko implicos uzadon de tiuj bazoj.

Indas sciiĝi ke ekzistas referencosistemoj kies koordinatoj ne estas videblaj kiel tiuj de molusko de Einstein: la nulaj koordinatoj, ekzemple. Tiuj anstataŭaj referencosistemoj simpligas kalkulojn en kelkaj specialaj fizikaj sistemoj, eĉ en speciala relativeco.

For example, the description of a vector or tensor in an event E needs a *vector basis* at E. A basis permits specifying the vector or tensor *components*. It is worth that bases in neighbor events differ only infinitesimally. Here we shall use only the best known bases, the *coordinate bases*, and their duals [11, page 80]. These bases are created from the coordinates, only. Thus, from now on, the word molusc implies use of those bases.

It is worth knowing that there are reference systems whose coordinates are not those of Einstein's molusc: the null coordinates, for example. These alternative reference systems simplify calculations in some special physical systems, even in the special relativity.

3 Metriko

La spacaj koordinatoj de du punktoj en spaca reto informas se tiuj punktoj estas najbaraj (infinitezime), aŭ ne. Se tamen la punktoj ne estas najbaraj, tial la koordinatoj solaj ne informas la valoron de *finhava* distanco inter ili; t.e., koordinatoj ne povas diri ion kiel 'punkto A distancas $1m$ de punkto B'. Simile, tempaj koordinatoj de du samlokaj eventoj (tiuj kun samaj spacaj koordinatoj) informas se la eventoj estas tempe najbaraj, aŭ ne. Sed se samlokaj eventoj ne estas najbaraj, la koordinatoj ne informas la *finhavan* intertempon de

3 Metric

The spatial coordinates of two points in a spatial frame inform whether these points are neighbor (infinitesimally), or not. If however the points are not neighbor, the coordinates alone are unable to say the value of the *finite* separation between them; that is, the coordinates are unable to say something as 'point A is $1m$ apart from point B'. Similarly, the time coordinates of two colocal events (those with the same spatial coordinates) inform whether the events are timely neighbor, or not. But if the colocal events are not neighbor, the coorprocezo, ion kiel ‘la procezo daŭras $1s$’. Tiaj informoj bezonas uzi *metrikon.*

Matematike, metrika kampo g estas tensora, simetria, de ordo 2. Se molusko estas elektita, la komponoj de g en evento E estas skribitaj $g_{\nu\rho}(E)$. Metriko oferas, krom alioj, la *linielementon* $\mathrm{d}s$ inter *najbaraj eventoj.* Tiel, estu $x^\mu = [ct, x^i\,]$ la koordinatoj de evento E, kie t estas montrata per loka horloĝo $\mathcal{K}_P$ de x^i; kaj estu $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu = [c(t + \mathrm{d}t), x^i + \mathrm{d}x^i\,]$ la koordinatoj de alia evento $E + \mathrm{d}E$, najbara al E, estante $t + \mathrm{d}t$ montrata per loka horloĝo $\mathcal{K}_{P+\mathrm{d}P}$ de $x^i + \mathrm{d}x^i$. La linielemento $\mathrm{d}s$ rilatantan tiujn eventojn obeas [12]

dinates do not inform the *finite* intertime of a process, such as ‘the process lasts $1s$’. These informs need use a *metric.*

Mathematically, the metric field g is tensorial, symmetric, of order 2. If a molusc was built, the components of g in the event E are written $g_{\nu\rho}(E)$. The metric field g gives, besides other things, the *line element* $\mathrm{d}s$ between *neighbor events.* Thus, assume $x^\mu = [ct, x^i\,]$ are coordinates of an event E, where t is shown by the local clock $\mathcal{K}_P$ of x^i; and assume $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu = [c(t+\mathrm{d}t), x^i + \mathrm{d}x^i\,]$ are coordinates of another event $E + \mathrm{d}E$, neighbor of E, and where $t + \mathrm{d}t$ is shown by the local clock $\mathcal{K}_{P+\mathrm{d}P}$ of $x^i + \mathrm{d}x^i$. The line element $\mathrm{d}s$ relating these events obeys [12]

$$\mathrm{d}s := \sqrt{\epsilon\, g_{\mu\nu}(E)\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu}\,, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3\,, \quad \epsilon = \pm 1\,; \tag{1}$$

la signumo ϵ en (1) estas elektata sama al de $g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu$, en ĉiu paro de eventoj.

Nek E nek $E + \mathrm{d}E$ estas kvarvektoroj. Sed $\mathrm{d}E$ estas infinitezima kvarvektoro, kun komponoj $\mathrm{d}x^\mu = [c\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}x^i]$. Ĝi estas de tempa tipo, aŭ nula tipo, aŭ spaca tipo, se $g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu > 0$, aŭ $= 0$, aŭ < 0, respektive.

Se $\mathrm{d}E$ estas de tempa tipo, tiuokaze

the signal ϵ in (1) is chosen the same as that of $g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu$, in each pair of events.

Neither E nor $E + \mathrm{d}E$ are four-vectors. But $\mathrm{d}E$ is an infinitesimal four-vector, with components $\mathrm{d}x^\mu = [c\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}x^i]$. It is timelike, or lightlike, or spacelike, according as $g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu > 0$, or $= 0$, or < 0, respectively.

If $\mathrm{d}E$ is timelike, then

$$\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\tau\,, \quad \epsilon = +1, \tag{2}$$

kie $\mathrm{d}\tau > 0$ estas la propra intertempo mezurata per normhorloĝo iranta de iu evento al alia. Intervaloj de tempa tipo okazas en movado de materia korpo, kiu vojaĝas kun rapido plieta ol c.

Ekv. (2) ebligas havigi komponojn $g_{\nu\rho}$ en evento $x^\mu := [c\,t, x^i]$, per eksperimenta metodo. En tiu metodo, nur proprajn intertempojn estas mezuritaj. Ni ĵetas 10 normhorloĝojn ekde punkto x^i, en loka momento t, en iuj ajn direktoj kaj kun iuj ajn rapidoj. Kiam la propratempo de ĉiu horloĝo h pliegiĝas de valoro $\Delta_h\tau$ sufiĉe malgranda, ni alnotas la tri spacajn koordinatojn $x^i + \Delta_h x^i$ de ĝia loko, kaj la montron $t + \Delta_h t$ de loka horloĝo. Simile kiel (1) kaj (2), ni skribas la 10 ekvaciojn

where $\mathrm{d}\tau > 0$ is the proper intertime measured by a standard clock going from an event to the other. Timelike intervals occur in motion of a material body, that travels with speed less than c.

Eq. (2) enables obtaining the components $g_{\nu\rho}$ in an event $x^\mu := [c\,t, x^i]$, by empirical method. In that method, only proper intertimes are measured. We throw 10 standard clocks from point x^i, in the local moment t, in random directions and with random speeds. When the propertime of each clock h has advanced a value $\Delta_h\tau$ short enough, we annotate the three spatial coordinates $x^i + \Delta_h x^i$ of the place where it is, and the reading $t + \Delta_h t$ of the local clock. As in (1) and (2), we write the 10 equations

$$c^2(\Delta_h\tau)^2 = g_{\nu\rho}\Delta_h x^\nu \Delta_h x^\rho\,, \qquad h = 1, 2, ..., 10\,, \tag{3}$$

kaj solvas tiun sistemon de ne-homogenaj linearaj ekvacioj por la 10 koeficientoj $g_{\nu\rho}$ en evento x^μ.

Fakte, kompono g_{00} estas sciebla pli facile, en punkto x^i kaj en loka momento t. En tiu momento ni fiksas normhorloĝon apud la loka horloĝo de x^i. La fluo de tempo de la du horloĝoj rilatas kiel (1) kaj (2) kun $\mathrm{d}x^i = 0$, tial uzas nur koeficienton g_{00} de metriko:

and solve that system of non-homogeneous linear equations for the 10 coefficients $g_{\nu\rho}$ in event x^μ.

In fact, component g_{00} can be known more easily, in point x^i and local moment t. In that moment we fix a standard clock beside the local clock of x^i. The time flows of the two clocks are related through (1) and (2) with $\mathrm{d}x^i = 0$, so uses only the coefficient g_{00} of the metric:

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{g_{00}(t, x^i)}\,\mathrm{d}t\,, \qquad x^i = \text{konst}\,; \tag{4}$$

mezurante $\mathrm{d}\tau$ kaj $\mathrm{d}t$, oni havas $g_{00}(t, x^i)$.

Se $\mathrm{d}E$ estas de spaca tipo, tial neniu korpo aŭ lumradiado povas esti en ambaŭ eventoj E kaj $E + \mathrm{d}E$; tiuokaze oni difinas *propran distancon* inter la eventoj,

measuring $\mathrm{d}\tau$ and $\mathrm{d}t$, one has $g_{00}(t, x^i)$.

If $\mathrm{d}E$ is spacelike, then no body or light ray can be present in both events E and $E + \mathrm{d}E$; in this case one defines the *proper distance* between the events,

$$\mathrm{d}\lambda := \mathrm{d}s\,, \quad \epsilon = -1\,; \tag{5}$$

ĝi ne pendas de molusko.

Fine, se $\mathrm{d}E$ estas de nula tipo, tial $\mathrm{d}s = 0$, kaj do ambaŭ propra intertempo $\mathrm{d}\tau$ kaj propra distanco $\mathrm{d}\lambda$ estas nulaj. Intervaloj de nula tipo okazas en movadoj kun rapido c, kiel tiu de lumo. En laboratorio, la matematika ($\mathrm{d}s = 0$) kaj eksperimenta praktikeco de lumo estas konvene profitita [13] por malkovri la koeficientojn $g_{\mu\nu}$ en elektita molusko.

it does not depend on the molusc.

Finally, if $\mathrm{d}E$ is lightlike, then $\mathrm{d}s = 0$, and so both proper intertime $\mathrm{d}\tau$ and proper distance $\mathrm{d}\lambda$ are null. Lightlike intervals occur in motions with speed c, such as light. In a laboratory, the mathematical ($\mathrm{d}s = 0$) and experimental practicality of light can be used [13] to uncover the coefficients $g_{\mu\nu}$ in a chosen molusc.

4 dL kaj dT

La speciala kaj la ĝenerala relativeco konsideras kvardimensian spacotempon. Tamen, nia homeco kutimigis nin percepti malkune la tempon kaj la spacon, en ordinaraj fenomenoj. Tio stimulas nin serĉi relativecajn kvantojn rilatante (tiel bone kiel estas ebla) al Newtonaj distanco kaj intertempo.

Propra distanco kaj propra intertempo ne estas la serĉataj kvantoj, ĉar $\mathrm{d}\lambda$ estas difinita

4 dL and dT

The special and the general relativity assume a four-dimensional spacetime. However, our humanness makes us apprehend separately space and time, in the most usual phenomena. This stimulates us to search for relativistic quantities that correspond (so well as possible) to the Newtonian distance and intertime.

Proper distance and proper intertime are not the quantities we are looking for, because nur se dE estas de spaca tipo, kaj dτ estas difinita nur se dE estas de tempa tipo. Ni anticipas ke la serĉataj kvantoj estos trovitaj en speciala inercia molusko.

Komence ni difinu distancon dL inter *punktoj* P kaj $P+\mathrm{d}P$, najbaraj en spaca reto, en elektita momento. Ni procedas simile kiel en speciala relativeco. Ni eligas lumsignalon el punkto $P = x^i$, en loka momento t. La signalo atingas punkton $P + \mathrm{d}P = x^i + \mathrm{d}x^i$ en loka momento $t+\mathrm{d}_1t$, kie d_1t (kio estas $>$, $<$, aŭ $= 0$) estas solvo de d$s = 0$:

dλ is defined only if dE is spacelike, and dτ is defined only if dE is timelike. We anticipate that the quantities we look for will be found in a special inertial molusc.

We start defining distance dL between neighbor *points*, P and $P + \mathrm{d}P$, of a spatial frame, in a chosen moment. We proceed similarly as in the special relativity. We emit a light signal from point $P = x^i$, in local moment t. The signal reaches point $P + \mathrm{d}P = x^i + \mathrm{d}x^i$ in local moment $t + \mathrm{d}_1t$, where d_1t (that is $>$, $<$, or $= 0$) is solution of d$s = 0$:

$$g_{00}(c\,\mathrm{d}_1t)^2 + 2g_{0i}(c\,\mathrm{d}_1t)\mathrm{d}x^i + g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = 0\,, \tag{6}$$

do

so

$$\mathrm{d}_1t = \frac{1}{c\sqrt{g_{00}}}\left(-h_i\mathrm{d}x^i + \epsilon_1\sqrt{h_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\right)\,, \tag{7}$$

kie

where

$$\epsilon_1 := \pm 1\,,\quad h_i(x^\mu) := \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\,,\quad h_{ij}(x^\mu) := \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}\,. \tag{8}$$

La signalo reflektas de $P + \mathrm{d}P$ en loka momento $(t+\mathrm{d}_1t)$, kaj revenas al P en loka momento $(t+\mathrm{d}_1t)+\mathrm{d}_2t$, kie d_2t (kio ankaŭ estas $>$, $<$, aŭ $= 0$) ankaŭ estas solvo de d$s = 0$:

The signal reflects from $P + \mathrm{d}P$ in local moment $(t + \mathrm{d}_1t)$, and returns to P in local moment $(t+\mathrm{d}_1t)+\mathrm{d}_2t$, where d_2t (that also is $>$, $<$, or $= 0$) is also solution of d$s = 0$:

$$g_{00}(c\,\mathrm{d}_2t)^2 - 2g_{0i}(c\,\mathrm{d}_2t)\mathrm{d}x^i + g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = 0\,, \tag{9}$$

do

so

$$\mathrm{d}_2t = \frac{1}{c\sqrt{g_{00}}}\left(+h_i\mathrm{d}x^i + \epsilon_2\sqrt{h_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\right),\quad \epsilon_2 := \pm 1\,. \tag{10}$$

Inter la eligo de la signalo kaj la reveno, la montro de $\mathcal{K}_P$ pligrandiĝas de

Between emission of the signal and return, the reading of $\mathcal{K}_P$ increases

$$\mathrm{d}_1t + \mathrm{d}_2t = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{c\sqrt{g_{00}}}\sqrt{h_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\,; \tag{11}$$

certe $\mathrm{d}_1t+\mathrm{d}_2t>0$, tial nur valoroj $\epsilon_1 = +1$ kaj $\epsilon_2 = +1$ validas en (11). Do, la propra intertempo dτ pasita en P, inter eligo de signalo kaj reveno, rilatas al (4) kaj (11) kiel

surely $\mathrm{d}_1t+\mathrm{d}_2t>0$, so only values $\epsilon_1 = +1$ and $\epsilon_2 = +1$ are valid in (11). Thus, the proper intertime dτ elapsed at P, between emission and return of signal, relates to (4) and (11) as

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\,(d_1t + d_2t) = \frac{2}{c}\sqrt{h_{ij}\,dx^i dx^j}\,. \tag{12}$$

Ni difinas $dL := c\,d\tau/2$, t.e., la duono de spaco trakurita per lumsignalo, kun rapido c, dum tiu propra intertempo. Uzante (12) ni fine ricevas $dL := \sqrt{h_{ij}\,dx^i dx^j}$.

Resume, la *distanco* inter du punktoj najbaraj en la reto estas

We define $dL := c\,d\tau/2$, that is, half the space covered by the light signal, with speed c, during that proper intertime. Using (12) we finally have $dL := \sqrt{h_{ij}\,dx^i dx^j}$.

In short, the *distance* between two neighbor points in the frame is

$$dL := \sqrt{\left(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}\right) dx^i dx^j}\,. \tag{13}$$

Ĉar la metrikaj koeficientoj ordinare varias kun t, tial ankaŭ la distancoj dL ordinare varias kun t. Kaj tiel kiel en Euklida geometrio, dL neniam estas negativa; kaj ĝi estas nula se nur la tri spacaj komponoj dx^i estas nulaj, t.e., se la punktoj P kaj $P + dP$ koincidas.

Ekvacio (13) difinas ankaŭ *distancon inter najbaraj eventoj*, en elektita molusko. Atentu ke dL ne pendas de diferenco dt inter la tempaj koordinatoj de eventoj. Tamen dL povas varii per ŝanĝo de molusko. Tiu fakto estas jam konita en speciala relativeco, per nomo plivastiĝo (aŭ malplivastiĝo) de Lorentz.

Ni povas ricevi (13) per alia maniero [5, paĝo 348]: en evento E ni konstruas vektoron

Since the metric coefficients usually vary with t, also the distances dL usually vary with t. And as in Euclidean geometry, dL is never negative; and it is null only if the three spatial components dx^i are null, that is, if the points P and $P + dP$ coincide.

Equation (13) defines also *distance between neighbor events*, in a chosen molusc. Note that dL does not depend on the difference dt between the time coordinates of events. However, dL may vary under change of molusc. This is already known in SR, under denomination Lorentz dilation (or contraction).

We can get (13) in another way [5, page 348]: in an event E we construct the vector

$$\tau^\mu := \delta^\mu_0/\sqrt{g_{00}}\,, \quad \tau_\mu = g_{0\mu}/\sqrt{g_{00}}\,; \tag{14}$$

ĝi estas de tempa tipo kaj unara $(\tau^\mu\tau_\mu = 1)$, kaj celas estonton $(\tau^0 > 0)$. Ni disigu vektoron dx^μ ĉe E per kompono $c\,dT$ en direkto τ^μ, kaj kompono dL^μ en hiperebeno orta al τ^μ:

it is timelike and unitary $(\tau^\mu\tau_\mu = 1)$, and points to the future $(\tau^0 > 0)$. We decompose a vector dx^μ anchored in E into component $c\,dT$ in direction τ^μ, and component dL^μ in the hyperplane normal to τ^μ:

$$dx^\mu = c\,dT\,\tau^\mu + dL^\mu\,, \quad \tau_\mu dL^\mu = 0\,; \tag{15}$$

tial $c\,dT = \tau_\mu dx^\mu$, kaj konsekvence

then $c\,dT = \tau_\mu dx^\mu$, and consequently

$$dL^\mu = dx^\mu - \tau^\mu\tau_\nu dx^\nu = (\delta^\mu_\nu - \tau^\mu\tau_\nu)dx^\nu\,. \tag{16}$$

Tiu dL^μ estas kvarvektoro de spaca tipo, kies normo $g_{\mu\nu}dL^\mu dL^\nu$ estas $-(dL)^2$. T.e.,

This dL^μ is a spacelike four-vector, whose norm $g_{\mu\nu}dL^\mu dL^\nu$ is $-(dL)^2$. That is,

$$(\mathrm{d}L)^2 = (g_{0\mu}g_{0\nu}/g_{00} - g_{\mu\nu})\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu\,; \tag{17}$$

ĉar nur $\mu = i$ kaj $\nu = j$ kontribuas al (17), tial ni rericevas (13).

Nun ni esploru $c\,\mathrm{d}T := \tau_\mu \mathrm{d}x^\mu$, t.e.,

since only $\mu = i$ and $\nu = j$ contribute to (17), we reobtain (13).

We now explore $c\,\mathrm{d}T := \tau_\mu \mathrm{d}x^\mu$, that is,

$$\mathrm{d}T := \frac{g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu}{c\sqrt{g_{00}}}\,. \tag{18}$$

Ni diras ke $\mathrm{d}T$ estas *intertempo* de evento x^μ al evento $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$, en elektita molusko. Ĉar τ^μ celas estonton, tial $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu$ pozitiva ($\mathrm{d}T > 0$) implicas ke evento $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ estas tempe *posta* al evento x^μ , en tiu molusko. Klare, $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu$ negativa implicas la malon. Kaj ni diras ke du najbaraj eventoj estas *samtempaj* se $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu$ estas nula ($\mathrm{d}T = 0$), en tiu molusko.

Atentu ke signumo de $\mathrm{d}t$ ne estas decidiga, en tiuj difinoj. Fakte, evento $E + \mathrm{d}E$, supozita tempe posta al evento E , povas havi $\mathrm{d}t > 0$ aŭ $\mathrm{d}t = 0$ aŭ $\mathrm{d}t < 0$. Tio estas jam sugestita en Figuro 1. Ĉar $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu \equiv \mathrm{d}x_0$, samtempeco estas pli kompakte esprimebla per $\mathrm{d}x_0 = 0$.

Atentu ankaŭ en (18) ke la intertempo $\mathrm{d}T$ pendas de spacaj komponoj $\mathrm{d}x^i$, sed ne pendas de nure spacaj metrikaj koeficientoj g_{ij}. Malsimile al propra intertempo $\mathrm{d}\tau$, kiu estas difinita nur se $\mathrm{d}x^\mu$ estas de tempa tipo, la intertempo $\mathrm{d}T$ estas difinita por $\mathrm{d}x^\mu$ de ia ajn tipo.

Simile kiel $\mathrm{d}L$, ankaŭ $\mathrm{d}T$ pendas de molusko. Atentu ankoraŭ ke

We say that $\mathrm{d}T$ is the *intertime* from event x^μ to event $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$, in a chosen molusc. Since τ^μ points to the future, then a positive $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu$ ($\mathrm{d}T > 0$) implies that the event $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ occurs *after* the event x^μ , in that molusc. Of course a negative $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu$ implies the opposite. And we say that two neighbor events are *simultaneous* if $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu$ is null ($\mathrm{d}T = 0$), in that molusc.

Note that the signal of $\mathrm{d}t$ is not deciding, in these definitions. In fact, an event $E + \mathrm{d}E$, assumed timely after event E , can have $\mathrm{d}t > 0$ as well as $\mathrm{d}t = 0$ or $\mathrm{d}t < 0$. This is already suggested in Figure 1. Since $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu \equiv \mathrm{d}x_0$, simultaneity can be expressed more compactly by $\mathrm{d}x_0 = 0$.

Also note in (18), that the intertime $\mathrm{d}T$ depends on the spatial components $\mathrm{d}x^i$, but not on the metric coefficients purely spatial, g_{ij}. Differently from the proper intertime $\mathrm{d}\tau$, that is defined only if $\mathrm{d}x^\mu$ is timelike, the intertime $\mathrm{d}T$ is defined for $\mathrm{d}x^\mu$ of any type.

Similarly to $\mathrm{d}L$, also $\mathrm{d}T$ depends on the molusc. Still note that

$$\epsilon(\mathrm{d}s)^2 = (c\,\mathrm{d}T)^2 - (\mathrm{d}L)^2\,. \tag{19}$$

Do, kvankam $\mathrm{d}T$ kaj $\mathrm{d}L$ pendas de molusko, ilia speciala kombino (19) ne pendas. La simileco de (19) kun analoga ekvacio en speciala relativeco ne estas akcidenta. Fakte, $\mathrm{d}T$ kaj $\mathrm{d}L$ estas intertempo kaj distanco inter najbaraj eventoj, mezuritaj en inercia referencosistemo fiksita en x^μ .

Se $\mathrm{d}x^\mu$ estas de *tempa tipo*, tial estas moluskoj kie la distanco $\mathrm{d}L'$ inter la eventoj es-

So, although $\mathrm{d}T$ and $\mathrm{d}L$ depend on the molusc, their special combination (19) does not depend. The similarity between (19) and analogous equation in the special relativity is not fortuitous. Really, $\mathrm{d}T$ and $\mathrm{d}L$ are intertime and distance between neighbor events, measured in an inertial system fixed in x^μ .

If $\mathrm{d}x^\mu$ is *timelike*, then there are moluscs where the distance $\mathrm{d}L'$ between the events is tas nula (samlokaj eventoj); tial la propra intertempo $\mathrm{d}\tau$ estas la modulo de intertempo $\mathrm{d}T'$ mezurita en iu ajn el tiuj moluskoj. Sed se $\mathrm{d}x^\mu$ estas de *spaca tipo*, tial estas moluskoj kie la intertempo $\mathrm{d}T'$ estas nula (samtempaj eventoj); tial la propra distanco $\mathrm{d}\lambda$ estas la distanco $\mathrm{d}L'$ mezurita en iu ajn el tiuj moluskoj. Fine, se $\mathrm{d}x^\mu$ estas de *nula tipo*, tial la propra intertempo $\mathrm{d}\tau$ kaj la propra distanco $\mathrm{d}\lambda$ estas nulaj. Sed la intertempo $\mathrm{d}T$ kaj la distanco $\mathrm{d}L$ estas ne-nulaj, plue ili havas saman modulon $(|c\mathrm{d}T| = \mathrm{d}L)$, kies valoro pendas de molusko.

null (colocal events); then the proper intertime $\mathrm{d}\tau$ is the modulus of intertime $\mathrm{d}T'$ measured in any of these moluscs. But if $\mathrm{d}x^\mu$ is *spacelike*, then there are moluscs where the intertime $\mathrm{d}T'$ is null (simultaneous events); then the proper distance $\mathrm{d}\lambda$ is the distance $\mathrm{d}L'$ measured in any of these moluscs. Finally, if $\mathrm{d}x^\mu$ is *lightlike*, then the proper intertime $\mathrm{d}\tau$ and the proper distance $\mathrm{d}\lambda$ are null. But the intertime $\mathrm{d}T$ and the distance $\mathrm{d}L$ are not null, further they have the same modulus $(|c\mathrm{d}T| = \mathrm{d}L)$, whose value depends on the molusc.

5 Kelkaj rimarkoj

En difino (13), atentu ke *ĉiuj* 10 koeficientoj $g_{\mu\nu}$ kontribuas al $\mathrm{d}L$; kaj ĉar tiuj koeficientoj ordinare varias laŭ la tempo, la distanco $\mathrm{d}L$ inter punktoj najbaraj en la reto ankaŭ ordinare varias, tial la reto ordinare malformiĝas laŭ la tempo. Atentu ankaŭ ke ĉar $(g_{0i}\mathrm{d}x^i)(g_{0j}\mathrm{d}x^j) \geq 0$, tial la miksitaj komponoj g_{0i} de metriko, se ne-nulaj, pligrandigas distancojn $\mathrm{d}L$.

Ĉar $h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ en (12) estas ne-negativa por iuj ajn $\mathrm{d}x^i$, koeficientoj h_{ij} difinitaj en (8) obeas la $3+3+1 = 7$ neegalecojn [4, paĝo 236]

5 Some notes

In definition (13), note that *all* 10 coefficients $g_{\mu\nu}$ contribute to $\mathrm{d}L$; and since these coefficients usually vary along time, the distance $\mathrm{d}L$ between neighbor poins in the frame also varies, so the spatial frame usually also deforms along time. Still note that since $(g_{0i}\mathrm{d}x^i)(g_{0j}\mathrm{d}x^j) \geq 0$, then the mixed components g_{0i} of the metric, if not null, increase the distances $\mathrm{d}L$.

Since $h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ in (12) is non-negative for any $\mathrm{d}x^i$, the coefficients h_{ij} defined in (8) obey the $3+3+1 = 7$ inequalities [4, page 236]

$$h_{ii} > 0\,, \quad h_{ii}h_{jj} > (h_{ij})^2\,, \quad \det(h_{ij}) > 0\,. \tag{20}$$

Tiuj neegalecoj faras ke $\mathrm{d}L$ estu nula nur se la tri komponoj $\mathrm{d}x^i$ estas nulaj. Kaj uzante h_{ij} de (8), kaj (20), ni vidas ke koeficientoj $g_{\mu\nu}$ obeas la $1+3+3+1 = 8$ neegalecojn

These inequalities make $\mathrm{d}L$ null only if the three components $\mathrm{d}x^i$ are null. And using h_{ij} from (8), and (20), we see that the coefficients $g_{\mu\nu}$ obey the $1+3+3+1 = 8$ inequalities

$$\begin{gathered} g_{00} > 0\,, \qquad g_{00}g_{ii} < (g_{0i})^2\,, \\ g_{00}(g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2) - g_{0i}(g_{0i}g_{jj} - g_{ij}g_{0j}) - g_{0j}(g_{0j}g_{ii} - g_{0i}g_{ij}) > 0\,, \qquad \det(g_{\mu\nu}) < 0\,. \end{gathered} \tag{21}$$

Pro *arbitra* ŝanĝo de molusko, kvantoj h_{ij}, $g_{\mu\nu}$, kaj $\mathrm{d}x^\mu$ ordinare varias, en eventoj E kaj $E+\mathrm{d}E$. Ni povas demandi se la specialaj kombinoj (13) kaj (18) de tiuj kvantoj lasas ke

Under *arbitrary* change of molusc, the quantities h_{ij}, $g_{\mu\nu}$, and $\mathrm{d}x^\mu$ usually vary, in events E and $E+\mathrm{d}E$. We may ask whether the special combinations (13) and (18) of these dL kaj dT estu ne-variantaj. Kiel en speciala relativeco, respondo estas *ne*, ordinare.

Kontraŭe, estas *specialaj* ŝanĝoj de molusko $[t, x^i] \to [t', x^{i'}]$ kiuj lasas ne-variantaj *ĉiun* infiniteziman distancon dL kaj *ĉiun* infiniteziman intertempon dT. En tiuj ŝanĝoj de molusko, la spaciaj koordinatoj transformas kiel $x^i \to x^{i'}(x^j)$. T.e., la ŝanĝo de iu spaca reto al la alia ne pendas de tempo. La responda tempa transformo povas esti ĝenerala, $t \to t'(t, x^i)$. Atentu ke la Lorentzaj transformoj por la spaca reto, uzataj en speciala relativeco, pendas de t; ekzemple, $x \to x' = \gamma(x - vt/c)$. Bonkonate, tiuj transformoj malplivastigas la spacan reton.

Ni vidis ke $\mathrm{d}L := \sqrt{h_{ij}\, \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j}$ estas distanco inter punktoj najbaraj en spaca reto de elektita molusko. Se punktoj ne estas najbaraj, la distanco inter ili estas difinita per integralo de dL laŭ la geodezio unuiganta ilin, uzante h_{ij} kiel tridimensia metriko. Ĉar tiuj koeficientoj ordinare varias laŭ la tempo, ankaŭ la distanco ordinare varias.

quantities leave dL and dT invariant. As in the special relativity, the answer is *no*, in general.

On the contrary, there are *special* changes of molusc $[t, x^i] \to [t', x^{i'}]$ that leave unchanged *every* infinitesimal distance dL and *every* infinitesimal intertime dT. In these changes of molusc, the spatial coordinates transform as $x^i \to x^{i'}(x^j)$. That is, the change from one spatial frame to the other does not depend on time. The corresponding time transformation can be general, $t \to t'(t, x^i)$. Note that the Lorentz transforms for the spatial frame, used in special relativity, depend on t; for example, $x \to x' = \gamma(x - vt/c)$. As is well known, these transforms contract the spatial frame.

We saw that $\mathrm{d}L := \sqrt{h_{ij}\, \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j}$ is distance between neighbor points in the spatial frame of a chosen molusc. If the points are not neighbor, the distance is defined as the integral of dL along the geodesic connecting them, using h_{ij} as components of three-dimensional metric. Since these coefficients usually vary with time, also the separations usually vary.

6 Rapido

Estu du najbaraj eventoj, kun koordinatoj x^μ kaj $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ en iu molusko. Uzante dL kaj dT, ni difinas *rapidon* rilatan al kvarvektoro dx^μ per

6 Velocity

Consider two neighbor events, with coordinates x^μ and $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ in some molusc. Using dL and dT, we define a *velocity* associated to the four-vector dx^μ by

$$v := \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}T}\,. \tag{22}$$

Klare, v pendas de molusko. Ĉar dL estas pozitiva, kaj dT povas esti aŭ pozitiva, aŭ nula, aŭ negativa, tial rapido (22) povas havi iun ajn valoron, $-\infty \le v \le \infty$. Okazas $v > 0$ se $\mathrm{d}T > 0$, t.e. se evento $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ estas tempe posta evento x^μ (tial $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu > 0$), kaj okazas $v < 0$ se kontraŭe (tial $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu < 0$). Kaj okazas $|v| = \infty$ se la eventoj estas samtempaj ($\mathrm{d}T = 0$).

Se $c\,\mathrm{d}T > \mathrm{d}L$, tial $0 < v < c$, indikante ke

Of course v depends on the molusc. Since dL is positive, while dT can be positive, or null, or negative, the velocity (22) can have any value, $-\infty \le v \le \infty$. It occurs $v > 0$ if $\mathrm{d}T > 0$, that is, if event $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ is later than event x^μ (then $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu > 0$), and it occurs $v < 0$ in the opposite case (then $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu < 0$). And it occurs $|v| = \infty$ if the events are simultaneous ($\mathrm{d}T = 0$).

If $c\,\mathrm{d}T > \mathrm{d}L$ then $0 < v < c$, indicatobjekto povas ekiri de punkto x^i de spaca reto en loka momento t kaj atingi punkton $x^i + \mathrm{d}x^i$ en loka momento $t + \mathrm{d}t$. Kaj se $c|\mathrm{d}T| > \mathrm{d}L$ sed $\mathrm{d}T < 0$, tial $-c < v < 0$, indikante ke objekto povas iri ekde $x^i + \mathrm{d}x^i$ en loka momento $t + \mathrm{d}t$ kaj atingi punkton x^i en loka momento t. En ambaŭ okazoj $\mathrm{d}t$ povas havi iun ajn signumon. Plue, (2) kaj (19) kaj (22) oferas je

ing that an object can start from point x^i in the spatial frame in local moment t and reach point $x^i + \mathrm{d}x^i$ in local moment $t + \mathrm{d}t$. And if $c|\mathrm{d}T| > \mathrm{d}L$ but $\mathrm{d}T < 0$ then $-c < v < 0$, indicating that the object can start from $x^i + \mathrm{d}x^i$ in local moment $t + \mathrm{d}t$ and reach point x^i in local moment t. In both cases $\mathrm{d}t$ can have any signal. Further, (2), (19) and (22) give

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,|\mathrm{d}T\,|, \tag{23}$$

estante v la rapido de objekto en tiu molusko.

Se $c|\mathrm{d}T| = \mathrm{d}L$, tial $\mathrm{d}s = 0$, do lumsignalo povas vojaĝi inter eventoj x^μ kaj $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$. Laŭ (22), la rapido de signalo havas modulon c. La signalo iras de x^i al $x^i + \mathrm{d}x^i$ se $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu > 0$, kaj en la mala direkto se $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu < 0$.

Fine, se $c|\mathrm{d}T| < \mathrm{d}L$ tial (22) indikas ke $|v| > c$: neniu objekto kaj neniu lumsignalo povas vojaĝi inter la eventoj. Speciale, se $\mathrm{d}T = 0$ kun $\mathrm{d}L \neq 0$, tial (22) indikas $|v| = \infty$.

where v is speed of the object in that molusc.

If $c|\mathrm{d}T| = \mathrm{d}L$, then $\mathrm{d}s = 0$, so a light signal can connect the events x^μ and $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$. According to (22), the velocity of the signal has modulus c. The signal goes from x^i to $x^i + \mathrm{d}x^i$ if $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu > 0$, and in the opposite direction if $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu < 0$.

Finally, if $c|\mathrm{d}T| < \mathrm{d}L$ then (22) says that $|v| > c$: no object and no light signal can connect the events. In particular, if $\mathrm{d}T = 0$ with $\mathrm{d}L \neq 0$ then (22) says that $|v| = \infty$.

7 En kurbo

Kurbo en spacotempo estas rompebla je pecoj. Peco esta nomita *de tempa tipo* (aŭ de nula tipo, aŭ de spaca tipo) se ĉiu infinitezima intervalo de tiu peco estas de tempa tipo (aŭ nula, aŭ spaca, respektive). Peco de tempa tipo kaj de nula tipo estas direkteblaj laŭ plieganta T, kaj tiu direkto ne varias per ŝanĝo de molusko. Ankaŭ peco de spaca tipo estas tiel direktebla, sed direkto povas varii per ŝanĝo de molusko.

Estu du eventoj E_1 kaj E_2, finie apartitaj. En Newtona mekaniko, la tempa apartigo inter ili estas simple $t_2 - t_1$, kaj la spaca apartigo estas simple $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$. En speciala relativeco la temo estas pli subtila, ĉar ambaŭ apartigoj pendas de la inercia referencosistemo ke oni uzas. Kaj en molusko de Einstein la temo estas ankoraŭ pli subtila.

Finia apartigo estas sumigo de infinitezi-

7 In a curve

A *curve in the spacetime* can be broken into pieces. A piece is said *timelike* (or lightlike or spacelike) if every infinitesimal interval of it is timelike (or lightlike or spacelike, respectively). The timelike and the lightlike pieces can be oriented according to increasing T, and that orientation does not change under a change of molusc. Also a spacelike piece can be so oriented, but the orientation can change under a change of molusc.

Consider two events E_1 and E_2, finitely apart. In Newtonian mechanics the time separation between them is simply $t_2 - t_1$, and the spatial separation is simply $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$. In special relativity the subject is more subtle, because both separations depend on the inertial reference system under use. And in a molusc of Einstein the subject is still more subtle.

Finite separation is a sum of infinitesimal maj apartigoj. Ni jam difinis du malsamajn infinitezimajn tempajn apartigojn: propran intertempon $\mathrm{d}\tau$ kaj intertempon $\mathrm{d}T$. Kaj ni difinis ankaŭ du malsamajn infinitezimajn spacajn apartigojn: propran distancon $\mathrm{d}\lambda$ kaj distancon $\mathrm{d}L$. Do ni havas 4 malsimilajn finiajn apartigojn por konsideri. Tiuj apartigoj estos difinataj laŭ iu elektita kurbo en spacotempo. Atentu ke estas nefinia nombro de kurboj de spaca tipo kunigante du iujn ajn eventojn. Sed eble ne ekzistas kurbon de nula tipo, aŭ de tempa tipo, por fari tion.

Se kurbo de tempa tipo komencas en evento E_1 kaj finiĝas en evento E_2, tial la integraĵo

separations. We already defined two different infinitesimal time separations: proper intertime $\mathrm{d}\tau$ and intertime $\mathrm{d}T$. And we also defined two different infinitesimal space separations: proper distance $\mathrm{d}\lambda$ and distance $\mathrm{d}L$. So we have 4 different finite separations to describe. These separations are to be defined along some chosen curve in spacetime. Note that there is an infinite number of spacelike curves to connect any two events. But possibly does not exist lightlike or timelike curve to do that.

If a timelike curve starts in event E_1 and ends in event E_2, then the integral

$$\Delta\tau = \int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}\tau\,, \tag{24}$$

kalkulita laŭ la kurbo, estas la propra intertempo inter la eventoj, laŭ tiu kurbo. Klare $\Delta\tau$ ne varias per ŝanĝo de molusko. Se alia kurbo de tempa tipo estas elektita inter tiuj eventoj, la nova propra intertempo havos malsaman valoron, ordinare. Ekzisto de kurbo de tempa tipo kunigante du eventoj implicas ekzisto de nefinia nombro de kurboj de nula tipo, kaj de spaca tipo, kunigante tiujn eventojn.

Se kurbo de spaca tipo estas elektita por kunigi E_1 kun E_2, tial la integraĵo

calculated along the curve, is the proper intertime between the events, along that curve. Clearly $\Delta\tau$ is invariant under change of molusc. If another timelike curve is chosen between these events, the new proper intertime will have another value, usually. The existence of a timelike curve between two events implies existence of an infinite number of lightlike curves, and of spacelike curves, connecting these events.

If a spacelike curve is chosen to connect E_1 with E_2, then the integral

$$\Delta\lambda = \int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}\lambda\,, \tag{25}$$

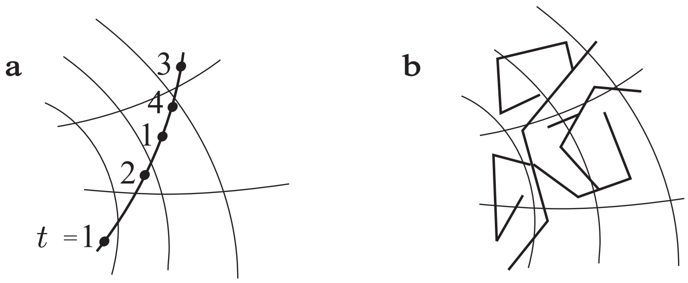
kalkulita laŭ la kurbo, estas la propralongo de kurbo inter la eventoj, laŭ tiu kurbo. Klare, $\Delta\lambda$ ne varias per ŝanĝo de molusko. Se alia kurbo de spaca tipo estas elektita inter tiuj eventoj, la propralongo de nova kurbo havos alian valoron, ordinare.

Kompletante, ni difinas intertempon ΔT kaj distancon ΔL, inter du eventoj en elektita kurbo. Ambaŭ pendas de molusko. Por ia ajn kurbo kunigante E_1 kun E_2, ili estas difinitaj per

calculated along the curve, is the properlength of the curve between these events, along that curve. Clearly $\Delta\lambda$ is invariant under change of molusc. If another spacelike curve is chosen between these events, the properlength of the new curve will have another value, usually.

To complete, we define intertime ΔT and distance ΔL between two events in a chosen curve. Both are molusc dependent. For a curve of any type connecting E_1 and E_2, they are defined by

$$\Delta T = \int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}T\,, \qquad \Delta L = \int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}L\,, \tag{26}$$



Figuro 2: **a**: En malfermita linio en spaca reto, ni elektas *eventojn samtempajn laŭ linio*; valoro de loka tempa koordinato t de eventoj varias, ordinare. **b**: Arbo en spaca reto, kun iom ajn da branĉoj, sed sen fermita spaca cirkvito; en tiu arbo ni povas elekti eventojn samtempajn laŭ linio.
Figure 2: **a**: In an open line in the spatial frame we select *events simultaneous along a line*; the value of local time coordinate t of these events varies from point to point, usually. **b**: A tree in the spatial frame, with any quantity of branches, but without closed spatial circuit; along that tree we can select events simultaneous.

kie la integro estas farita laŭ la kurbo [14]. Speciala kurbo por integro de ambaŭ (26a) kaj (26b) estas *spacotempa geodezio* entenanta E_1 kaj E_2. Tiu geodezio povas esti de ia tipo. Por integro de (26b), alia speciala kurbo estas geodezio entenanta punktojn P_1 kaj P_2, kalkulita kun metrikaj koeficientoj h_{ij} skribitaj en (8c).

Estas moluskoj kies intertempoj ΔT estas haveblaj sen bezoni integri (26a). Ekzemple, molusko kies kvar kvocientoj $g_{0\mu}/\sqrt{g_{00}}$ estas komponoj de kvargradiento de iu funkcio, kiu ni nomas $cT(x^\nu)$. Tial (18) diras ke la intertempo ΔT de evento E_1 al evento E_2 valoras $T(E_2) - T(E_1)$ por ia ajn kurbo, en tiu molusko.

Oni povas montri [4, paĝo 237] ke iu ajn finia peco de spacotempo permesas moluskojn kun $g_{00} = 1$ kaj $g_{0i} = 0$. En tiuj moluskoj, (18) simpliĝas al $\mathrm{d}T = \mathrm{d}t$, do iu intertempo ΔT koincidas kun Δt.

where the integration is performed along the curve [14]. A special curve for both integrals (26a) and (26b) is a *spacetime geodesic* containing E_1 and E_2. That geodesic can be of any type. To integrate (26b), another special curve is the geodesic containing points P_1 and P_2, calculated with the metric coefficients h_{ij} written in (8c).

There are moluscs whose intertimes ΔT can be obtained without integrating (26a). For example, a molusc whose four quocients $g_{0\mu}/\sqrt{g_{00}}$ are components of four-gradient of some function, say $cT(x^\nu)$. Then (18) says that the intertime ΔT from event E_1 to event E_2 is $T(E_2) - T(E_1)$ for any curve, in that molusc.

One can show [4, page 237] that any finite portion of spacetime permits moluscs with $g_{00} = 1$ and $g_{0i} = 0$. In these moluscs, (18) simplifies to $\mathrm{d}T = \mathrm{d}t$, so every intertime ΔT coincides with Δt.

8 Samtempaj eventoj

Sekcio 4 difinis samtempajn *najbarajn* eventojn en elektita molusko, tiel ke iliaj intertempo $\mathrm{d}T$ estas nula, do [4, paĝo 237]

8 Simultaneous events

Section 4 defined simultaneous *neighbor* events in a chosen molusc, such that their intertime $\mathrm{d}T$ is null, so [4, page 237]

$$c\,\mathrm{d}t = -\frac{g_{0i}(x^\mu)\,\mathrm{d}x^i}{g_{00}(x^\mu)}\,, \tag{27}$$

estante x^μ kaj $x^\mu+\mathrm{d}x^\mu$ koordinatoj de eventoj en molusko. Kaj ni vidis ke ŝanĝo de molusko ordinare malfaras fruajn samtempecojn, sed kreas novajn.

Nun ni difinas samtempecon de eventoj *finie* apartitaj en spaca reto de molusko. Por tio, ni kreas novan koncepton, tiun de *samtempeco laŭ linio* en spaca reto [4, paĝo 237]. Ni elektas iun ajn *linion* $\mathcal{L}$ sen memcruciĝo en spaca reto, kaj elektas iun ajn eventon E en tiu lineo. Tial ni povas trovi, ekde evento E kaj en ambaŭ direktoj de lineo $\mathcal{L}$, sinsekvajn samtempajn najbarajn eventojn ($\mathrm{d}T = 0$) en $\mathcal{L}$. Kvankam samtempaj najbaraj eventoj havas valorojn de loka tempo t tre similaj, eventoj en punktoj sufiĉe apartitaj en $\mathcal{L}$ povas havi valorojn de t *tre malsimilaj*. Tamen ni diras ke tiuj eventoj estas *samtempaj laŭ* $\mathcal{L}$. Vidu Figuron 2a. Tiu koncepto validas ankaŭ por *arbo de samtempecoj* en spaca reto de molusko, kiel en Figuro 2b.

Atentu ke du eventoj samtempaj laŭ linio $\mathcal{L}_a$ en elektita molusko ne estas samtempaj laŭ alia linio $\mathcal{L}_b$, ordinare. Tio ordinare malpermesas ekziston de *fermita* linio en spaca reto, konsistanta nure el paroj de samtempaj najbaraj eventoj. Konsekvence ne ekzistas, ordinare, eventoj finie apartitaj en spaca reto, estante samtempaj laŭ iu ajn linio. Vidu Figuron 3.

Bonkonate, ĉiu finia peco de spacotempo permesas moluskojn tiel ke ĉiuj eventoj estas samtempaj laŭ iu ajn linio [4, paĝo 286]. Tial ni diras ke tiuj eventoj estas *samtempaj* (sen indiki linion) en tiu molusko. Ekzemple, en molusko kun $g_{0i} = 0$ ĉiuj eventoj kun sama valoro de t estas samtempaj, laŭ (27).

Aliaj moluskoj oferantaj (tutan, por emfazo) samtempecon havas la tri kvocientojn g_{0i}/g_{00} ne pendantaj de t, kaj plue estantaj komponoj de trigradiento de funkcio, kiun ni

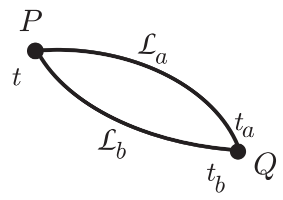
where x^μ and $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ are components of the events in the molusc. And we saw that a change of molusc usually undoes previous simultaneities, but creates new.

We now define simultaneity of events *finitely* separated in the spatial frame of a molusc. For that, a new concept is built, that of *simultaneity along a line* in the spatial frame [4, page 237]. We choose any line $\mathcal{L}$ without self-intersection in the spatial frame, and we choose any event E in that line. We then specify sequentially, starting from event E and in both directions of line $\mathcal{L}$, simultaneous neighbor events ($\mathrm{d}T = 0$) along $\mathcal{L}$. Although simultaneous neighbor events have values of local time t very similar, events in points sufficiently apart on $\mathcal{L}$ can have *very different* values of t. Even though, we shall say that all these events are *simultaneous along* $\mathcal{L}$. See Figure 2a. This concept can be extended to a *tree of simultaneities* in the spatial frame, as in Figure 2b.

Note that two events simultaneous along a line $\mathcal{L}_a$ in a given molusc are not simultaneous along another line $\mathcal{L}_b$, in general. This prevents existence, in general, of a *closed* line in the spatial frame, where every pair of neighbor events is simultaneous. Consequently there do not exist, in general, events finitely separated in the spatial frame, that be simultaneous along any line. See Figure 3.

It is well known that every finite portion of spacetime permits moluscs such that all events are simultaneous along any line [4, page 286]. We then say that these events are *simultaneous* (without reference to line) in that molusc. For example, in molusc with $g_{0i} = 0$ all events with same value of t are simultaneous, according to (27).

Other moluscs that offer global simultaneity have the three cocients g_{0i}/g_{00} not depending on t, and further being components of the three-gradient of some function, which we call



Figuro 3: P kaj Q estas punktoj de spaca reto, kunigitaj per linioj $\mathcal{L}_a$ kaj $\mathcal{L}_b$ en la reto. Supozu ke evento $[t_a, Q]$ estas samtempa al $[t, P]$ laŭ linio $\mathcal{L}_a$. Ankaŭ supozu ke alia evento $[t_b, Q]$ estas samtempa al $[t, P]$, sed laŭ linio $\mathcal{L}_b$. Ordinare $t_b \neq t_a$, tial unuigo $\mathcal{L}_a \cup \mathcal{L}_b$ ordinare ne estas fermita linio de samtempaj eventoj.
Figure 3: P and Q are points of the spatial frame, joined through lines $\mathcal{L}_a$ and $\mathcal{L}_b$ in the frame. Suppose event $[t_a, Q]$ is simultaneous to $[t, P]$ along line $\mathcal{L}_a$. Suppose another event $[t_b, Q]$ is also simultaneous to $[t, P]$, but along line $\mathcal{L}_b$. Usually $t_b \neq t_a$, so the union $\mathcal{L}_a \cup \mathcal{L}_b$ usually is not a closed line of simultaneous events.

nomas $-ct(x^j)$. Tio estas,

$-ct(x^j)$. That is,

$$\frac{g_{0i}\,(t, x^j)}{g_{00}\,(t, x^j)} = -c\frac{\partial t(x^j)}{\partial x^i}\,. \tag{28}$$

Tial, kondiĉo por samtempeco (27) simpliĝas al $\mathrm{d}t = \mathrm{d}t(x^j)$, kies solvo estas $t - t_0 = t(x^j) - t(x^j_0)$. Per vortoj, se oni elektas eventon $E_0 := [t_0, x^j_0]$, tial funkcio $t(x^j)$ indikas valoron de t en evento $[t, x^j]$, kiu estas samtempa al evento E_0 laŭ iu ajn linio en spaca reto. Ni ĉiam povas konstrui tiel molusko, en finia peco de spacotempo.

Ni scias ke du najbaraj eventoj generas ĝuste unu geodezion. Se tiuj eventoj estas samtempaj ($\mathrm{d}T = 0$) en iu molusko, tial la geodezio estas de spaca tipo. Kaj la rapido (22) rilata al eventoj estas nefinia en tiu molusko. Ni difinas *geodezio de samtempecoj*, geodezion de spaca tipo kie ĉiuj najbaraj eventoj estas samtempaj, en tiu molusko [15, 17]. Malsimile al aliaj geodezioj, ĉi tia ne estas direktebla per plieganta T. En Newtona interpreto, ĝi prezentas movadon de hipoteza objekto sentiva al gravito, sed vojaĝanta kun nefinia rapido.

So the condition for simultaneity (27) reduces to $\mathrm{d}t = \mathrm{d}t(x^j)$, whose solution is $t - t_0 = t(x^j) - t(x^j_0)$. In words, if an event $E_0 := [t_0, x^j_0]$ is chosen, the function $t(x^j)$ indicates the value of t in event $[t, x^j]$, that is simultaneous to event E_0 along any line in the spatial frame. We can always build one such molusc, in a finite portion of spacetime.

We know that two neighbor events generate just one geodesic. If they are simultaneous ($\mathrm{d}T = 0$) in some molusc, then the geodesic is spacelike. And the velocity (22) associated to the two events is infinite in that molusc. We define as *geodesic of simultaneities* the spacelike geodesic whose (all) neighbor events are simultaneous, in that molusc [15, 17]. Differently from other geodesics, it can not be oriented with increasing T. In a Newtonian interpretation, it represents the motion of a hipothetical object sensitive to gravitation, but traveling with infinite velocity.

9 Sinkronaj horloĝoj

Kutime ni diras ke du horloĝoj estas sinkronaj se ili 'montras la saman horon'. En Ne-

9 Synchronous clocks

We commonly say that two clocks are synchronous when they 'show the same hour'.

wtona mekaniko kaj en speciala relativeco la koordinathorloĝoj estas ĉiam sinkronaj, ĉar ili estas tiel elektitaj. Sed se ni uzas spacotempajn koordinatojn pli ĝeneralaj, ni bezonas esti pli precizaj por difini sinkronon.

Por *najbaraj* koordinathorloĝoj, bona difino estas: en elektita molusko, horloĝoj de ${x_0}^i$ kaj ${x_0}^i + \mathrm{d}x^i$ estas *sinkronaj en momento* t_0 se iliaj montroj t_0 estas *samtempaj* ($\mathrm{d}T = 0$); t.e., se eventoj $[\,t_0, {x_0}^i]$ kaj $[\,t_0, {x_0}^i{+}\mathrm{d}x^i]$ estas semtempaj en tiu molusko. Tial, kondiĉo (27) por samtempeco de najbaraj eventoj, kune kun $\mathrm{d}t = 0$, oferas la *kondiĉon por sinkrono* de najbaraj koordinathorloĝoj en momento t_0:

In Newtonian mechanics and special relativity the coordinate clocks are always synchronous, because they are so chosen. But if we use spacetime coordinates more general, we must be more precise in defining synchrony.

For *neighbor* coordinate clocks, a good definition is: in a chosen molusc, the clocks of ${x_0}^i$ and ${x_0}^i + \mathrm{d}x^i$ are *synchronous in moment* t_0 if their readings t_0 are *simultaneous* ($\mathrm{d}T = 0$); that is, if events $[\,t_0, {x_0}^i]$ and $[\,t_0, {x_0}^i + \mathrm{d}x^i]$ are simultaneous in that molusc. Then the condition (27) for simultaneity of neighbor events, together with $\mathrm{d}t = 0$, give the *condition for synchrony* of neighbor coordinate clocks in moment t_0:

$$g_{0i}(t_0, {x_0}^i)\,\mathrm{d}x^i = 0. \tag{29}$$

Atentu ke sinkrono ordinare estas momenta, ĉar g_{0i} ordinare varias laŭ la tempo.

Por koordinathorloĝoj *finie apartitaj* en spaca reto de molusko, oni proponas *sinkronon laŭ linio*. Tial, estu evento $[t_x, x^i]$. Kaj selektu linion $\mathcal{L}$ en spaca reto, entenante punkton x^i. Sekvante marku eventojn $[t_y, y^i]$ samtempajn al evento $[t_x, x^i]$, en ambaŭ direktoj de linio $\mathcal{L}$. La horloĝo de y^i estas nomita sinkrona al horloĝo de x^i, laŭ linio $\mathcal{L}$ kaj en momento t_x, se $t_y = t_x$. Atentu ke la kvanto de tiuj aliaj horloĝoj povas varii de nulo al nefinio, kaj ke la sinkrono ordinare estas momenta.

Klare ke (29) veriĝas en moluskoj kun la tri funkcioj $g_{0i} = 0$. Tial en tiuj moluskoj ĉiuj koordinathorloĝoj estas sinkronaj, laŭ iu ajn linio kaj en iu ajn momento, eĉ se la aliaj metrikaj koeficientoj g_{00} kaj g_{ij} pendas de tempo.

Sekcio 8 montris ke moluskoj havantaj $g_{0i}(x^\mu)/g_{00}(x^\mu) = -c\nabla_i t(x^j)$ permesas ĝeneralan samtempecon. Tio sugestas ke ni faru ŝanĝon de tempa koordinato $t \to t' = t - t(x^j)$, kiu nuliĝas miksitajn komponojn $g_{0'i'}$ de nova molusko. Tio estas, la koordinathorloĝoj de nova molusko estos ĉiam sinkronaj.

Note that a synchrony is usually momentary, since g_{0i} usually change along time.

For coordinate clocks *finitely separated* in the spatial frame, one proposes *synchrony along a line*. Thus, consider event $[t_x, x^i]$, and choose a line $\mathcal{L}$ in the spatial frame, containing point x^i. Then select consecutively events $[t_y, y^i]$ simultaneous to $[t_x, x^i]$, along both directions of line $\mathcal{L}$. The clock of y^i is said synchronous to the clock of x^i, along $\mathcal{L}$ in moment t_x, if $t_y = t_x$. Note that the quantity of these other clocks can vary from zero to infinity, and that the synchrony is usually momentary.

Clearly (29) is true in moluscs with the three functions $g_{0i} = 0$. So in these moluscs all coordinate clocks are synchronous, along any line and at any moment, even if the other metrical coefficients g_{00} and g_{ij} depend on time.

Section 8 has shown that moluscs with $g_{0i}(x^\mu)/g_{00}(x^\mu) = -c\nabla_i t(x^j)$ permit global simultaneity. This suggests us to make change of time coordinate $t \to t' = t - t(x^j)$, which brings to zero the mixed components $g_{0'i'}$ in the new molusc. That is, the coordinate clocks of the new molusc will be eternally synchronous.

10 Komentoj

Sekcio 8 montris ke molusko hazarde elektita, por spacotempo ankaŭ hazarde elektita, ordinare ne permesas tutan samtempecon. Pli klare, ordinare ĝi ne permesas ekziston de eventoj samtempaj laŭ iu ajn linio. Sed iu ajn evento $E = [t, P]$ havas *infiniteziman samtempan najbaron.* Alivorte, ĉiam ekzistas infinitezima najbaro de punkto P en spaca reto, kies koordinathorloĝoj obeas samtempecon (27). Oni facile provas ke ĉiu paro de eventoj de tiu najbaro estas ankaŭ samtempaj.

Infinitezima sinkrona disko estas interesa subaro de tiu najbaro. Ĝi estas infinitezima disko en spaca reto kies koordinathorloĝoj estas sinkronaj. Do, ĉiu ajn evento estas centro de tial disko.

Sinkrona linio en spaca reto ekzistas en molusko kie unu el la tri komponoj g_{0i} estas nula. Ekzemple, se $g_{01} = 0$, tial (27) veriĝas en linio kie nur x^1 varias. Simile, *sinkrona surfaco* en spaca reto ekzistas en molusko kie du el la tri funkcioj g_{0i} estas nulaj. Fakte, en tia surfaco ĉiuj koordinathorloĝoj estas sinkronaj laŭ iu ajn linio kunigante ilin, en la surfaco.

Pli ĝenerale, sinkronaj surfacoj ekzistas en moluskoj kun

10 Comments

Section 8 showed that a randomly chosen molusc, for a spacetime also randomly chosen, usually does not permit global simultaneity. That is, usually it does not permit existence of events that are simultaneous along any line. But any event $E = [t, P]$ has an *infinitesimal simultaneous neighborhood.* In other words, there always exist an infinitesimal neighborhood of point P in the spatial frame, whose coordinate clocks satisfy simultaneity (27). One easily proves that every pair of events in that neighborhood are also simultaneous.

The *infinitesimal synchronous disc* is an interesting subset of that neighborhood. It is an infinitesimal disc in the spatial frame, whose coordinate clocks are synchronous. Thus, every event is center of one such disc.

A *synchronous line* in the spatial frame exists in molusc where one of the three components g_{0i} is null. For example, if $g_{01} = 0$, then (27) is true along any line where only x^1 varies. Similarly, a *synchronous surface* in the spatial frame exists in molusc where two of the three components g_{0i} are null. Remember, in that surface all coordinate clocks are synchronous along any line connecting them, in the surface.

More generally, synchronous surfaces exist in moluscs with

$$g_{0i}(t, x^j) = \varphi(t, x^j) \frac{\partial \phi(x^j)}{\partial x^i} \,; \tag{30}$$

en tiuj moluskoj, surfacoj $\phi(x^j) = \text{konst}$ estas sinkronaj.

in these moluscs, the surfaces $\phi(x^j) = \text{const}$ are synchronous.

11 Gravita Doppplera efiko

En onda fenomeno, Dopplera efiko estas ŝanĝo de frekvenco ν_{obs} observata, kompare kun frekvenco ν_{fon} igita el fonto. Tiu fenomeno estas priskribita per Dopplera faktoro $D := \nu_{obs}/\nu_{fon}$. Se $D > 1$, oni diras ke albluiĝo okazas, kaj se $D < 1$, oni diras ke

11 Gravitational Doppler effect

In a wave phenomenon, Doppler effect is a change in the observed frequency ν_{obs} , compared with the emitted frequency ν_{fon} . This effect is measured by the Doppler factor $D := \nu_{obs}/\nu_{fon}$. If $D > 1$, one says that blueshift occurred, and if $D < 1$, one says that redalruĝiĝo okazas. Kelkaj kialoj por la neegaleco $D \neq 1$ estas rapido kaj loko de fonto en momento de eligo de ondo, kaj ankaŭ rapido kaj loko de observanto en momento de ricevo.

Praktika maniero por sciiĝi Doppleran faktoron estas unue supozi ke fonto eligas du signalojn, apartigitajn kun sufiĉe malgranda propra intertempo $\Delta\tau_{fon}$, mezurita per fonto; poste kalkuli la propran intertempon $\Delta\tau_{obs}$ mezurita per observanto, inter ricevo de tiuj signaloj. Tial la Dopplera faktoro estos [16]

shift occurred. Some reasons for the shifts are the velocity and localization of the emitting source in the moment of emission, and also of the observer in the moment of reception.

A practical way of obtaining the Doppler factor is first suppose that the source emits two signals, separated by a sufficiently short proper intertime $\Delta\tau_{fon}$ of the source; then calculate the proper intertime $\Delta\tau_{obs}$ of the observer, between the reception of the two signals. The Doppler factor then is [16]

$$D = \Delta\tau_{fon}/\Delta\tau_{obs}\,. \tag{31}$$

En speciala okazo ke fonto kaj observanto estas fiksitaj en spaca reto de nemovebla molusko (tiu, kiu ne malformiĝas laŭ la tempo), tial [5, paĝo 414]

In the special case that source and observer are fixed in the spatial frame of a stationary molusc (that which does not deform along the time), then [5, page 414]

$$D = \sqrt{\frac{g_{00}(P_{fon})}{g_{00}(P_{obs})}}\,, \tag{32}$$

estante P_{fon} kaj P_{obs} pozicioj de fonto kaj observanto en reto. En molusko de Schwarzschild, ekzemple, kie $g_{00} = 1 - 2Gm/(c^2 r)$, la Dopplera faktoro por lumo falanta de alto h_{fon} ĝis alto h_{obs} ĉe nia planedo (kun radiuso R kaj maso M) estas

being P_{fon} and P_{obs} the locations of source and observer in the frame. In Schwarzschild's molusc, for example, where $g_{00} = 1 - 2Gm/(c^2 r)$, the Doppler factor for light falling from altitude h_{fon} till altitude h_{obs} in our planet (with radius R and mass M) is

$$D = \sqrt{\frac{1-(2GM/c^2)/(R+h_{fon})}{1-(2GM/c^2)/(R+h_{obs})}} \approx 1 + \frac{g}{c^2}\Delta h\,, \tag{33}$$

estante $g := GM/R^2$ la akcelo pro tera gravito en marnivelo kaj $\Delta h := h_{fon} - h_{obs}$.

being $g := GM/R^2$ the acceleration due to earth gravity at sea-level and $\Delta h := h_{fon} - h_{obs}$.

12 Reveno al estinto

Ĝenerala relativeco permesas surprizan eblecon, *revenon al estinto*. Tio signifas ke persono revenanta de vojaĝo povas vidi lokajn horloĝojn montrante momenton antaŭan al de ekvojaĝo. Tiu ebleco estas ofte trovita en moluskoj rotaciantaj rilate al inercia referencosistemo.

Ekzemple, konsideru spacotempon de Som-Raychaudhuri [17],

12 Time travel

General relativity allows for a surprising possibility, *time travel*. That is, a person returning from a tour could see the local clocks showing a moment prior to that of departure. That possibility is often found in moluscs rotating relative to an inertial reference system.

For example, consider the spacetime of Som-Raychaudhuri [17],

$$\epsilon(\mathrm{d}s)^2 = [c\,\mathrm{d}t + (\omega r^2/c)\,\mathrm{d}\varphi]^2 - r^2(\mathrm{d}\varphi)^2 - (\mathrm{d}r)^2 - (\mathrm{d}z)^2\,. \tag{34}$$

La materio kongruanta al tiu metriko estas elektre ŝarĝita polvo, rigide rotacianta ĉirkaŭ akso z de inercia referencosistemo. Sen perdi ĝeneralecon, ni supozas rotacion en hora direkto $(-\vec{z}\ )$, implicante $\omega > 0$. La polvo restas en molusko de (34). Ni montros ke persono revenas (pli maljune) al loka estinto, se vojaĝas en cirklo kun $r > c/\omega$ konstanta, kaj kun konstanta rapido $v > c^2/(\omega r)$, en direkto mala al tiu de ω.

Por nia studo en cirklo, sufiĉas konsideri

The matter related to this metric is electrically charged dust, rotating rigidly around the z-axis of an inertial reference system. Without loss of generality, we suppose rotation in clockwise direction $(-\vec{z}\ )$, implying $\omega > 0$. The dust is at rest in the molusc of (34). We shall show that a person returns (more old) to the local past, if travels in a cirkle with radius $r > c/\omega$, and constant velocity $v > c^2/(\omega r)$, in direction opposite to ω.

For our study in the cirkle, it suffices consider

$$(c\,\mathrm{d}\tau)^2 = [c\,\mathrm{d}t + (\omega r^2/c)\,\mathrm{d}\varphi]^2 - r^2(\mathrm{d}\varphi)^2\,. \tag{35}$$

Komence, atentu ke du najbaraj koordinathorloĝoj en sama cirklo $r =$ konst ne estas sinkronaj laŭ la cirklo. Fakte, du najbaraj eventoj $[t, r, \varphi]$ kaj $[t{+}\mathrm{d}t, r, \varphi{+}\mathrm{d}\varphi]$ estas samtempaj se $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu = 0$, t.e., se

To begin, note that two coordinate clocks neighbor in the same cirkle $r =$ const are nor synchronous along the circle. Really, two neighbor events $[t, r, \varphi]$ and $[t + \mathrm{d}t, r, \varphi + \mathrm{d}\varphi]$ are simultaneous if $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu = 0$, that is, if

$$c\,\mathrm{d}t + (\omega r^2/c)\mathrm{d}\varphi = 0\,. \tag{36}$$

Supozante ke ω kaj $\mathrm{d}\varphi$ estas pozitivaj, veriĝas $\mathrm{d}t < 0$, indikante ke koordinathorloĝo de $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ malfruas rilate al tiu de φ. Do, se io ekvojaĝas el φ_0 en loka momento t_0, en malhora direkto (direkto *mala* al rotacio ω), kun nefinia rapido, tial ĝi atingos pozicion $\varphi_0{+}\mathrm{d}\varphi$ en loka momento $t_0 - (\omega r^2/c^2)\mathrm{d}\varphi$. Se tiu io daŭras kun nefinia rapido en cirklo $r =$ konst, ĝi revenos al komenca pozicio φ_0 en loka momento $t_0 - (2\pi\omega r^2/c^2)$. Tio estas, ĝi revenos en momento antaŭa al tiu de ekvojaĝo.

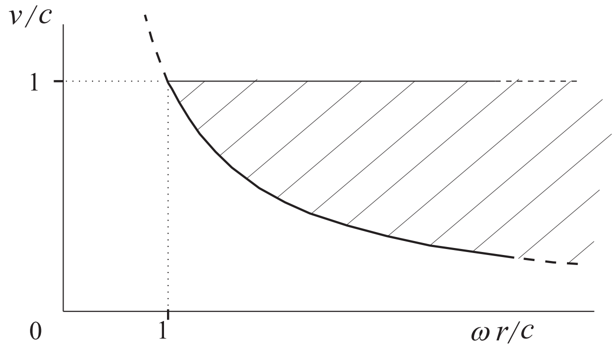
Sed persono ne povas havi $|v| = \infty$, li devas havi $|v| < c$. Tial ni demandas: ĉu estas rapido $|v| < c$ kaj radiuso r tiaj ke momento de reveno de vojaĝanto estas frua je momento de ekvojaĝo, en universo de Som-Raychaudhuri? Surpriza respondo de ĝenerala relativeco estas *jes*.

Fakte, rapido de vojaĝanto en cirklo estas $v = \mathrm{d}L/\mathrm{d}T$, estante $\mathrm{d}L = r\mathrm{d}\varphi$ laŭ (13), kaj

Supposing ω and $\mathrm{d}\varphi$ positive, then $\mathrm{d}t < 0$, indicating that the coordinate clock in $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ is late relative to that in φ. Thus, if something starts from φ_0 in local moment t_0, in anti-clockwise direction (direction *opposite* to the rotation ω), with infinite velocity, it reaches position $\varphi_0 + \mathrm{d}\varphi$ in local moment $t_0 - (\omega r^2/c^2)\mathrm{d}\varphi$. If that something proceedes with infinite velocity in the cirkle $r =$ const, it returns to position φ_0 in local moment $t_0 - (2\pi\omega r^2/c^2)$. That is, it returns in moment prior to that of departure.

But a person cannnot have $|v| = \infty$, he must have $|v| < c$. We then ask: is there any velocity $|v| < c$ and radius r such that the moment of return of the voyager is prior to the moment of departure, in Som-Raychaudhuri universe? The surprising answer of general relativity is *jes*.

Really, the velocity of voyager in the circle is $v = \mathrm{d}L/\mathrm{d}T$, with $\mathrm{d}L = r\mathrm{d}\varphi$ according to



Figuro 4: Strekata regiono, $c/(\omega r) < v/c < 1$, indikas parojn de radiuso r (kun unueco c/ω) kaj rapido v (kun unueco c) rilataj al reveno de vojaĝanto al estinto, en spacotempo de Som-Raychaudhuri.
Figure 4: The streaked region, $c/(\omega r) < v/c < 1$, indicates pairs of radius r (with unit c/ω) and velocity v (with unit c) related to return of a voyager to the past, in spacetime of Som-Raychaudhuri.

$\mathrm{d}T = \mathrm{d}t + (\omega r^2/c^2)\mathrm{d}\varphi$ laŭ (18). Tial

(13), and $\mathrm{d}T = \mathrm{d}t + (\omega r^2/c^2)\mathrm{d}\varphi$ according to (18). Thus

$$v = \frac{r\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t + (\omega r^2/c^2)\mathrm{d}\varphi} . \tag{37}$$

Ĉar $v =$ konst implicas $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = \Delta\varphi/\Delta t$, tial en kompleta turno ($\Delta\varphi = 2\pi$) okazas

Since $v =$ const implies $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = \Delta\varphi/\Delta t$, in a complete turn ($\Delta\varphi = 2\pi$) it occurs

$$v = \frac{2\pi r}{\Delta t + 2\pi\omega r^2/c^2} . \tag{38}$$

Do

Then

$$\Delta t = 2\pi r(1/v - \omega r/c^2) , \tag{39}$$

montrante ke Δt estas negativa se $v > c^2/(\omega r)$. Ĉar ni impozas $v < c$, la kondiĉo por persono reveni al estinto en spacotempo de Som-Raychaudhuri estas

showing that Δt is negative whenever $v > c^2/(\omega r)$. Since we impose $v < c$, the condition to a person return to the past in the spacetime of Som-Raychaudhuri is

$$c/(\omega r) < v/c < 1 . \tag{40}$$

Figuro 4 indikas regionon de ebeno [r, v] rilata al reveno de vojaĝanto al estinto.

Figure 4 indicates the region of the plane [r, v] related to return of a voyager to the past.

13 Konkludo

Pluraj niaj fruaj artikloj diskutis pri spacotempo ĉe la speciala relativeco [1, 16,

13 Conclusion

Several preceding articles of ours discoursed upon spacetime in the special relativity [1, 16, 18]. Aliaj artikloj traktis pri fenomenoj en ĝenerala relativeco [15, 17, 19]. Ni nun diskutis plidetale pri spacotempo ĉe la ĝenerala relativeco.

Sekcio 1 traktis pri temoj gravaj por la artiklo: normhorloĝo, propratempo, konstanteco de c, kaj sekondo.

Sekcio 2 emfazis kiom libere la spacotempaj koordinatoj estas elektitaj en ĝenerala relativeco, speciale la loka tempa koordinato. Komencantaj fizikistoj ofte ne kredas ke tiel ĝeneralaj koordinatoj povas esti utilaj por precizaj kalkuloj.

Sekcio 3 montris kiel la spacotempa metriko rilatas tiujn arbitrajn koordinatojn al infinitezimaj propraj distancoj $\mathrm{d}\lambda$, aŭ al infinitezimajn propraj intertempoj $\mathrm{d}\tau$. Por tio, sole la konstanta rapido c de lumo en vakuo estis uzita.

Sekcioj 4 – 6 difinis distancon $\mathrm{d}L$ inter du najbaraj punktoj fiksitaj en spaca reto, kaj intertempon $\mathrm{d}T$ de evento al najbara evento. Ambaŭ $\mathrm{d}L$ kaj $\mathrm{d}T$ estis difinitaj en inercia referencosistemo restanta rilate al elektita spaca reto, najbare al la eventoj. Oni ordinare konsentas ke $\mathrm{d}L$ kaj $\mathrm{d}T$ estas kvantoj kiuj plej similas al Newtona distanco kaj intertempo. Tri-dimensia metriko $h_{ij}(x^\mu)$ por la spaca reto estis derivita, denove uzante sole la konstantan valoron c. Plu, rapido v rilatante du najbarajn eventojn estis prezentita, pendanta de spacotempa koordinataro uzita. Ĝia modulo superas c, se intervalo estas de spaca tipo.

Sekcio 7 klarigis ke, en ĝenerala relativeco, distancoj kaj intertempoj rilataj al eventoj finiaj apartitaj ne estas kiel en Newtona mekaniko. Nun bezonas enkonduki koncepton de distanco kaj de intertempo laŭ elektita kurbo en spacotempo. Simile, Sekcioj 8 kaj 9 difinis samtempecon de eventoj kaj sinkronon de horloĝoj, laŭ elektita linio en spaca reto.

Sekcio 10 anoncis ekziston de du interesaj infinitezimaj subaroj de spaca reto. La unua estas tri-dimensia, permesante ekziston de samtempaj eventoj. La dua estas du-dimensia, entenante sinkronajn koordi-

18]. Other articles dealt with phenomena in the general relativity [15, 17, 19]. We now discoursed with more details upon spacetime in the general relativity.

Section 1 dealt with important topics for the article: standard clock, propertime, constancy of c, and second.

Section 2 emphazised how freely the spacetime coordinates are chosen in general relativity, especially the local time coordinate. Pedestrian physicists often do not believe that so general coordinates can be useful for precise calculations.

Section 3 showed how the spacetime metric relates these arbitrary coordinates to infinitesimal proper distances $\mathrm{d}\lambda$, or to infinitesimal proper intertimes $\mathrm{d}\tau$. To that end, solely the constant velocity c of light in vacuum was used.

Sections 4 – 6 defined distance $\mathrm{d}L$ between two neighbor points fixed in the spatial frame, and intertime $\mathrm{d}T$ from one event to a neighbor one. Both $\mathrm{d}L$ and $\mathrm{d}T$ were defined in an inertial reference system at rest relative to the local frame under use, in the vicinity of the events. One usually agrees that $\mathrm{d}L$ and $\mathrm{d}T$ are the quantities that most closely resemble the Newtonian distance and intertime. A three-dimensional metric $h_{ij}(x^\mu)$ for the spatial frame was derived, again using solely the constant value c. Still, a velocity v relating two neighbor events was presented, depending on the spacetime coordinates used. Its modulus exceeds c, if the interval is spacelike.

Section 7 made clear that, in general relativity, distances and intertimes relating events finitely separated are not as in Newtonian mechanics. Now needs introduce the concept of distance and intertime along a chosen curve in spacetime. Similarly, Sections 8 and 9 defined simultaneity of events and synchrony of clocks, along a chosen line in the spatial frame.

Section 10 announced existence two interesting infinitesimal subsets of the spatial frame. The first is three-dimensional, permitting simultaneous events. The second is two-dimensional, containing synchronous conathorloĝojn.

Sekcio 11 prezentis gravan prognozon de ĝenerala relativeco, tion de gravita albluiĝo de lumo falanta sur tero. Alia prognozo estas gravita alruĝiĝo de lumo eskapanta el stelo. Kutime tiuj du efikoj konkursas, kaj la gravita alruĝiĝo ordinare estras.

Fine, Sekcio 12 faris detalan eksponadon de reveno al estinto en spacotempo de Som-Raychaudhuri. En tiu universo kun $\omega = 1$ turno/jarcento, persono revenas al estinto se vojaĝas en cirklo kun radiuso $r = 70$ lumjaroj kun konstanta rapido $v = c/4$, en direkto mala al ω. Kruda takso prognozas komfortan radiusan akcelon (ĉirkaŭ trionon de tera gravito ĉe marnivelo), por teni vojaĝanton en orbito.

ordinate clocks.

Section 11 presented an important prediction of general relativity, the gravitational blueshift of light falling on earth. Another prediction is the gravitational redshift of light escaping from a star. In ĝeneral these two effects conflict, and the redshift usually dominates.

Finally, Section 12 made a detailed exposition of time travel in the Som-Raychaudhuri spacetime. In such universe with $\omega = 1$ turn/century, a person returns to the past, if travels in a circle with radius $r = 70$ light-years with constant velocity $v = c/4$, in direction opposite to ω. A crude estimate predicts a comfortable radial acceleration (nearly one third of earth gravity at sea-level), to maintain the voyager in orbit.

Citaĵoj

[1] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *The relativistic time – I*, arXiv/physics/0603053 in Esperanto: CBPF-NF-006/06 in Esperanto/Portuguese.

[2] Bureau International des Poids et Mesures, kaj Organisation intergouvernamentale de la Convention du Mètre, *Le système international d'unités (SI)* 7^e^ édition 1998, Édité par le BIPM, France (http://www.bipm.fr/utils/en/pdf/brochures-si.pdf).

[3] A. Einstein, *Relativity, the special and the general theory: a popular exposition*, 15^{th} *ed.*, Methuen, London (1954).

[4] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The classical theory of fields*, Butterworth-Heinemann (1996).

[5] J.L. Anderson, *Principles of relativity physics*, Academic Press (1967).

[6] J.L. Synge, *Relativity: the general theory*, North-Holland (1960).

[7] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman (1973).

[8] B. Tonkinson, *The behaviour of clocks and rods in special and general relativity*, arXiv:0904.3029.

[9] Tamen, oni kutime uzas *sekundon* kiel unueco de intertempo Δt de koordinato. Tio okazas ĉar oni kutime uzas normhorloĝon kiel koordinathorloĝo.
However, one usually uses the *second* as unit of coordinate intertime Δt. This is because one usually uses standard clock as coordinate clock.

[10] Nomo *molusko* estis proponita ĉar la malformiĝo de spaca reto estas ordinare malrapida, en homa skalo [3, paĝo 99]. En nuna artiklo, '*molusko*' signifas 'spacotempa koordinatsistemo konstruita kiel en Sekcio 2'.
The name *molusc* was proposed because the deformation of spatial frame is usually slow,

in human scale [3, page 99]. In the present article, '*molusc*' means 'spacetime coordinate system built as in Section 2'.

[11] A. Lichnerowicz, *Éléments de calcul tensoriel*, Librairie Armand Colin (1955).

[12] Esprimo *linielemento* estas ofte uzata por kvadrato $(\mathrm{d}s)^2$; kaj la parametro ϵ estas ofte preterlasita en difino (1), tial permesante ke $(\mathrm{d}s)^2$ estu negativa. Tiu ĉi artiklo uzas signaturon -2 por metriko.
The phrase *line element* is often used for the square $(\mathrm{d}s)^2$; and the parameter ϵ is often omitted in the definition (1), allowing for negative $(\mathrm{d}s)^2$. This article uses signature -2 for the metric.

[13] A.F.F. Teixeira, *Experimentally obtaining metrics in general relativity*, arXiv/gr-qc/0505047 in Esperanto.

[14] Malsimile al $\Delta\tau$ kaj $\Delta\lambda$, ambaŭ ΔT kaj ΔL estas difineblaj en kurboj kun pecoj de malsimilaj tipoj.
Differently from $\Delta\tau$ and $\Delta\lambda$, both ΔT and ΔL can be defined in curves with pieces of different types.

[15] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Samtempaj geodezioj ĉe Ŝvarcŝild / Geodesics of simultaneities in Schwarzschild*, arXiv:1006.4654 ; CBPF-NF-012/10 in Esperanto/Portuguese.

[16] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efekto ĉe unuforme akcelata movo – II / Relativistic Doppler effect in a uniformly accelerated motion – II*, arXiv:0704.1130 ; CBPF-NF-011/07 in Esperanto/Portuguese.

[17] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Tempa vojaĝo kaj geodezioj en ĝenerala relativeco / Time travel and geodesics in general relativity*, arXiv:1104.2273 ; CBPF-NF-009/11 in Esperanto/Portuguese.

[18] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira:
Relativistic Doppler effect in a uniformly accelerated motion – I, arXiv/physics/0701092 in Esperanto; CBPF-NF-002/07 in Esperanto/Portuguese;
Relativistic Doppler effect between two accelerated bodies, arXiv:0801.2290 in Esperanto; CBPF-NF-001/08 in Esperanto/Portuguese;
Relativistic Doppler effect in a uniformly accelerated motion – III, arXiv:0808.0126 in Esperanto; CBPF-NF-018/08 in Esperanto/Portuguese;
Doppler effect of a luminous plane as seen by an accelerated observer, arXiv:0810.2776 in Esperanto; CBPF-NF-022/08 in Esperanto/Portuguese.

[19] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Doppler effects in Schwarzschild*, arXiv:0912.1229 in Esperanto; CBPF-NF-023/09 in Esperanto/Portuguese.