Relativeca Dopplera efekto ĉe unuforme akcelata movo – II

F.M. Paiva

Departamento de Física, U.E. Humaitá II, Colégio Pedro II

Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

1–a de februaro, 2008

Resumo

Daŭrigante [1], luma fonto de unukolora radiado ĉe rekta movo ĉe konstanta propra akcelo pasas preter restanta observanto. Ĉe la special-relativeco, ni priskribas la observatan Doppleran efikon. Ni ankaŭ priskribas la interesan nekontinuan efikon se trapaso okazas.

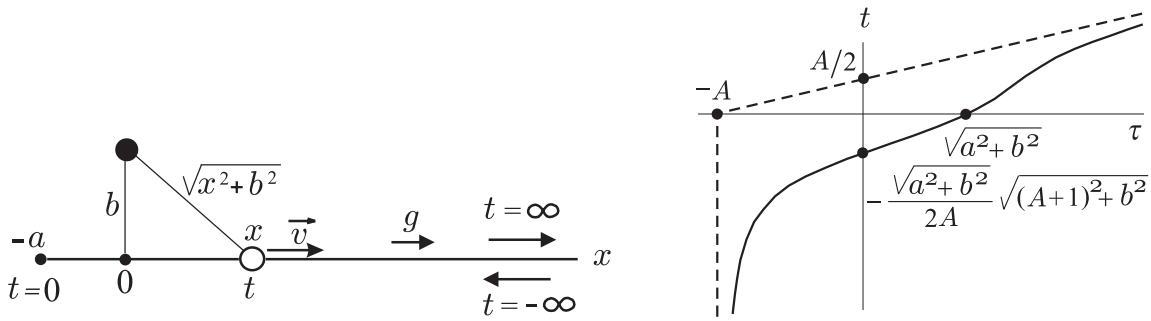
- - - - - - - - - - -

Extending [1], a light source of monochromatic radiation, in rectilinear motion under constant proper acceleration, passes near an observer at rest. In the context of special relativity, we describe the observed Doppler effect. We describe also the interesting discontinuous effect when riding through occurs. An English version of this article is available.

1 Enkonduko

Citaĵo [1] studis Doppleran efikon de lumo eligita el restanta fonto, vidata per akcelata observanto kiu pasas preter aŭ tra la fonto. Ĉi tie ni inversas tiun sistemon. Nun, fonto de unukolora radiado ĉe rekta movo ĉe konstanta propra akcelo pasas preter aŭ tra restanta observanto. La frekvenco ν de la lumo eligata estas konstanta; tamen, la observata frekvenco (t.e., la koloro) estas ν_{obs}, malsama ol ν. Tio estas nomata Dopplera efiko. La proporcio $D = \nu_{obs}/\nu$, nomata Dopplera faktoro, estas studata ĉi tie.

Estiĝu inercia referenco sistemo $S = \{t, \vec{x}\}$. El nefinia loko $x = \infty$, je nefinia estinta momento $t = -\infty$, luma fonto ekvenis al origino $x = 0$, per la akso x. Ĝia komenca rapido estis $-c$, kaj ĝi estas malakcelata per konstanta propra akcelo g; tiel ĝi pasas la originon, poste momente restas ĉe $x = -a$ je $t = 0$, kaj tuj reiras al nefinio $x = \infty$ kun sama akcelo. En $x = 0$, distance b el akso x, estas restanta observanto, kiel montras figuro (1.a). Ni konsideras la preterpason kun $b \neq 0$ kaj la trapason kun $b = 0$. Krome ni komparas niajn rezultojn al tiujn de [1].



Figuro 1: La sistemo. **1.a)** Observanto (nigra sfereto) estas fiksa distance b de akso x. Luma fonto (blanka sfereto) estas iranta de $x=-a$ al $x=\infty$, kun konstanta propra akcelo g. Antaŭe ĝi venis el $x=\infty$ ($t=-\infty$), kun konstanta propra malakcelo g, ĝis $x=-a$ ($t=0$).
1.b) La moviĝanta fonto eligas signalon en la momento t de la inercia sistemo S, kaj la restanta observanto ricevas tiun signalon en la momento τ, ekv. (6). Vidu la asimptotojn $t=(\tau+A)/2$ kaj $\tau=-A$. Vidu ankaŭ ke ne estas ricevo en tempo antaŭ $\tau=-A$.

Ĉi tie x estas la loko de fonto je momento t, ambaŭ mezurataj per la inercia referenco sistemo S. La tempo τ, ankaŭ en S, estas la propratempo de la restanta observanto kiam li ricevas signalon el x je t. Kiel figuro (1.a) evidentigas, la intertempo $\tau - t$ inter eligo kaj enigo de signalo estas $\sqrt{x^2+b^2}/c$.

Por simpligi formulojn ni formale konsideros $c=1$ kaj $g=1$. Por aperigi la arbitrajn valorojn sufiĉas substitui

$$a\to ag/c^2\ ,\ A\to Ag/c^2\ ,\ b\to bg/c^2\ ,\ x\to gx/c^2\ ,\ v\to v/c\ ,\ t\to gt/c\ ,\ \tau\to g\tau/c\ ,\ \tau'\to g\tau'/c\ . \quad (1)$$

Farinte tiun simpligon kaj uzante la kondiĉojn $x(0)=-a$ kaj $v(0)=0$, la rapido v kaj la loko x de la fonto ĉe konstanta propra akcelo g estas [1]

$$v(t)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ ,\qquad x(t)=\sqrt{1+t^2}-A\ ,\qquad A:=a+1\ . \quad (2)$$

Ĉar la fonto ne restas en S, tial la propratempo de eligo de signalo estas $\tau'\neq t$. Vere $\mathrm{d}\tau'=\mathrm{d}t/\gamma(t)=\sqrt{1-v^2(t)/c^2}\mathrm{d}t$. La integro de $\mathrm{d}\tau'$ fiksante $\tau'=0$ kiam $t=0$ estas

$$t=\sinh\tau'\ , \quad (3)$$

do la rapido kaj la loko de la fonto kiel funkcioj de τ' estas

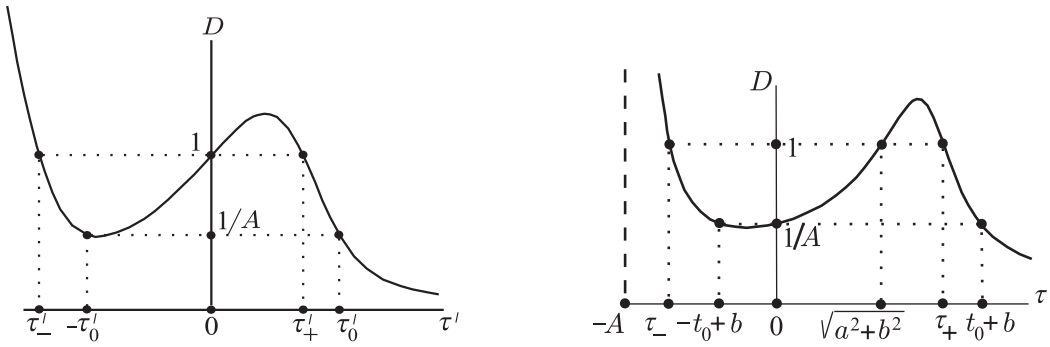
$$v(\tau')=\tanh\tau'\ ,\qquad x(\tau')=\cosh\tau'-A\ . \quad (4)$$

Vidu ke la preterpasoj ($x=0$) okazas kun rapido $v_0:=\sqrt{A^2-1}/A$ je $\mp t_0$ (aŭ $\mp\tau'_0$), kie

$$t_0:=\sqrt{A^2-1}\ ,\qquad \tau'_0:=\cosh^{-1}A\ . \quad (5)$$

Interesas kalkuli la rilaton inter la tempo t de eligo kaj la tempo τ de enigo. El figuro (1.a)

$$\tau=t+\sqrt{x^2+b^2}=t+\sqrt{(\sqrt{1+t^2}-A)^2+b^2}\ , \quad (6)$$



Figuro 2: Doppleraj faktoroj. **2.a)** D kiel funkcio (8) de la propratempo τ' de moviĝanta fonto. Estas tri momentoj en kiuj la radiado ne havos kolor-ŝanĝon ($D=1$); la unua (τ'_-) antaŭas al momento $-\tau'_0$ de la unua preterpaso; la dua ($\tau'=0$) okazas kiam la fonto restas ĉe $x=-a$; kaj la tria (τ'_+) antaŭas al momento τ'_0 de la dua preterpaso. La radiadoj ĉe la momentoj $\mp\tau'_0$ de preterpaso havas $D=1/A$, do ili estas ruĝ-delokigataj. La valoroj de τ'_- kaj τ'_+ estas ĉe (9), kaj τ'_0 estas ĉe (5).
2.b) D kiel funkcio de la momento τ de ricevo de la lumo. La unuaj signaloj estas ricevataj kiam $\tau=-A$, kvankam ili estis eligataj detempe de $\tau=-\infty$. Ne estas kolor-ŝanĝo je τ_-, $\sqrt{a^2+b^2}$, kaj τ_+. La radiado eligita en la preterpaso, $\mp t_0$ en ekv. (5), estas observata je $\mp t_0+b$, ekv. (6), kun $D=1/A$.

uzante (2). Figuro (1.b) montras ke la enigo ne komencas kiam $\tau=-\infty$, sed jese kiam $\tau=-A$. La fonto eligis tiujn komencajn signalojn je $t=-\infty$ el $x=\infty$, kiam ĝia rapido estis $-c$. Observu ankaŭ la asimptoton $\tau=2\,t-A$ por $t\to\infty$; la fonto eligos tiujn signalojn je $t=\infty$, kaj ili enigos poste 'duoble' nefinia tempo al observanto.

2 Dopplera efiko

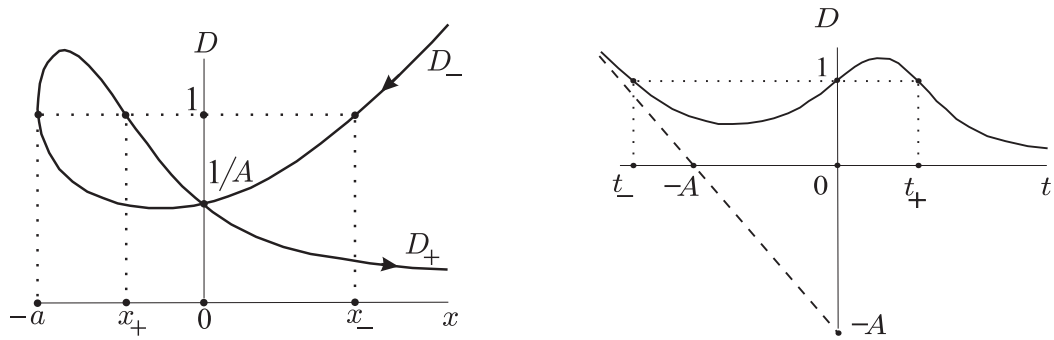
Ĉar frekvenco estas la inverso de periodo, tial ni povas redifini la Doppleran faktoron kiel

$$D(\tau) := \frac{\mathrm{d}\tau'}{\mathrm{d}\tau} = \sqrt{1-v^2(t)}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\ . \tag{7}$$

Ĉi tie $\mathrm{d}\tau'$ estas la infinitezima propra intertempo per la fonto inter eligo de du lumaj signaloj, kaj $\mathrm{d}\tau$ estas la infinitezima propra intertempo per la observanto inter enigo de tiuj du lumaj signaloj. La radiko rilatas al la tempa dilato pro la movado de la fonto. Kiam $D<1$ la Dopplera efiko estas nomata 'ruĝ-delokigo', kaj kiam $D>1$ ĝi estas nomata 'viol-delokigo'. Ni emfazas ke estas aliaj difinoj de Dopplera faktoro [2].

Sekve ni kalkulas la Doppleran faktoron kiel funkcio de τ', τ, x kaj de t. Ni komencas kun $D(\tau')$. Uzante la difinon (7) en la formo $D=(\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}\tau')^{-1}$, derivante (6) kaj uzante $t(\tau')$ kaj $x(\tau')$ el (3) kaj (4), la faktoro estiĝas

$$D(\tau') = \left(\cosh\tau' + \frac{(\cosh\tau'-A)\sinh\tau'}{\sqrt{(\cosh\tau'-A)^2+b^2}}\right)^{-1}\ . \tag{8}$$



Figuro 3: Doppleraj faktoroj. **3.a)** D_- kaj D_+ kiel funkcio (11) de loko x de lum-eligo el la moviĝanta fonto. Sagoj montras la pozitivan fluon de tempo. Radiado el x_-, $-a$, kaj x_+ ne kolor-ŝanĝos, $D=1$. La valoroj de x_- kaj x_+ estas en (12). Radiadoj el preterpasoj $x=0$ havos $D=1/A$, do ili estos ruĝ-delokigataj.
3.b) D kiel funkcio (13) de tempo t de referenc-sistemo S. Vidu ke $D=1$ kiam $t_-=\sinh\tau'_-$, $t=0$, kaj $t_+=\sinh\tau'_+$, estante τ'_- kaj τ'_+ prezentataj en (9). Vidu ankaŭ la asimptoton $D=-t-A$.

Figuro (2.a) montras ke ne estas Dopplera efiko ($D=1$) trifoje:

$$\tau'_- := -2\sinh^{-1}\frac{1}{4}(\sqrt{b^2+8a}+b)\ ,\quad \tau'=0\ ,\quad \tau'_+ := 2\sinh^{-1}\frac{1}{4}(\sqrt{b^2+8a}-b)\ . \tag{9}$$

Nun ni kalkulas D kiel funkcio de la propratempo τ de enigo de lumo al observanto. Uzante (3) kaj (6) ni havigas

$$\sinh\tau' = \frac{1}{2(\tau^2-A^2)}\left(\tau(\tau^2-C^2)+A\sqrt{(\tau^2-C^2)^2+4(\tau^2-A^2)}\right)\ ,\quad C^2 := A^2+b^2+1\ ; \tag{10}$$

substituante tiun kaj $\cosh\tau' = \sqrt{1+\sinh^2\tau'}$ en ekvacio (8) ni havigas la deziratan Doppleran faktoron $D(\tau)$. Figuro (2.b) montras tiun funkcion.

Nun ni kalkulu la Doppleran faktoron kiel funkcio de la loko x de signal-eligo. Uzante (2), (3) kaj (4) en (8), vidu ke

$$D_\epsilon(x) = \left(x+A+\frac{\epsilon x\sqrt{(x+A)^2-1}}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)^{-1}\ ,\quad \epsilon := |t|/t. \tag{11}$$

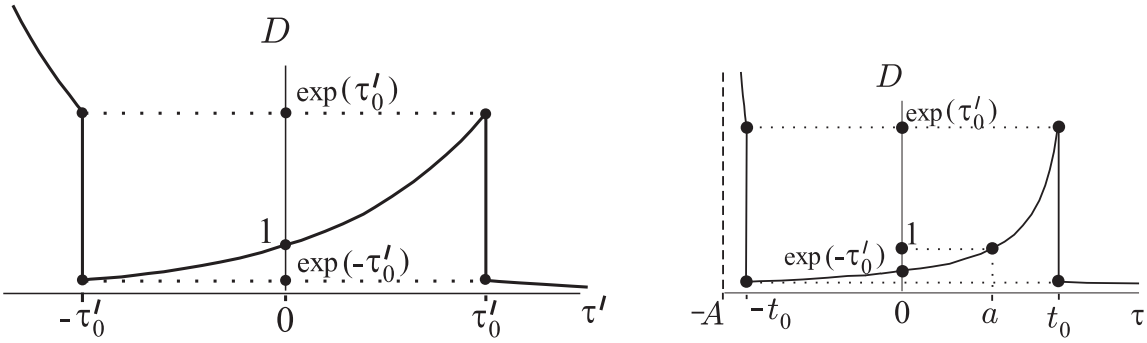
Figuro (3.a) montras la du funkciojn $D_-(x)$ kaj $D_+(x)$. Observu la tri lokojn el kiuj la lumo eligita ne kolor-ŝanĝos:

$$x_- := \frac{b}{4}(\sqrt{b^2+8a}+b)\ ,\ x=-a\ ,\ x_+ := -\frac{b}{4}(\sqrt{b^2+8a}-b)\ . \tag{12}$$

Fine ni montras D kiel funkcio de la inercia tempo t de eligo:

$$D(t) = \left(\sqrt{1+t^2}+\frac{tx}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)^{-1}\ ,\quad x(t)=\sqrt{1+t^2}-A\ . \tag{13}$$

Figuro (3.b) montras tiun funkcion. Observu la asimptoton $D=-t-A$ kiam $t\to-\infty$.



Figuro 4: Doppleraj faktoroj kun $b = 0$. **4.a)** D kiel eksponencialaj funkcioj (14) de propratempo τ' de moviĝanta fonto. Estas nekontinueco de D en momentoj $\mp\tau_0'$, prezentataj en (5).
4.b) D kiel funkcio (15) de propratempo τ de observanto. Estas nekontinueco de D en momentoj $\mp t_0$ de trapaso. Kiam $\tau = a$ ne estas kolor-ŝanĝo. Vidu la asimptoton $\tau = -A$; do la observanto ricevas la unuajn signalojn en ĉi tiu momento, nefinie viol-delokigataj. La valoro de t_0 kaj de τ_0' estas en (5).

3 Trapaso

Nun ni studas la interesan okazon ĉe $b=0$. Anstataŭ preterpasi, la fonto pasas *tra* la observanto. Tio generas nekontinuecon ΔD je la Dopplera faktoro. Por havigi D kiel funkcio de τ', τ, x kaj t, ni faras $b = 0$ en ekvacioj (8), (10), (11), (13), respektive. Pri $D(\tau')$ ni havigas

$$D(\tau') = \exp(-\epsilon_x \tau') \ , \tag{14}$$

kie ϵ_x estas la signumo de x. Estas $\epsilon_x = +1$ kiam $\tau' < -\tau_0'$ kaj $\tau' > \tau_0'$, kaj estas $\epsilon_x = -1$ kiam $-\tau_0' < \tau' < \tau_0'$. Vidu figuron (4.a).

Pri $D(\tau)$, figuro (4.b) montras la funkcion

$$D(\tau) = \begin{cases} (A+\tau)^{-1} \ , & -A < \tau < -t_0 \ , \quad \tau > t_0 \ , \\ \\ (A-\tau)^{-1} \ , & -t_0 < \tau < t_0 \ . \end{cases} \tag{15}$$

Pri $D(x)$ ni havigas

$$D_\epsilon(x) = x + A - \epsilon\epsilon_x \sqrt{(x+A)^2 - 1} \ . \tag{16}$$

Vidu figuron (5.a), observante la tempan sinsekvon *i*, *ii*, *iii*, *iv*, *v*, *vi*.

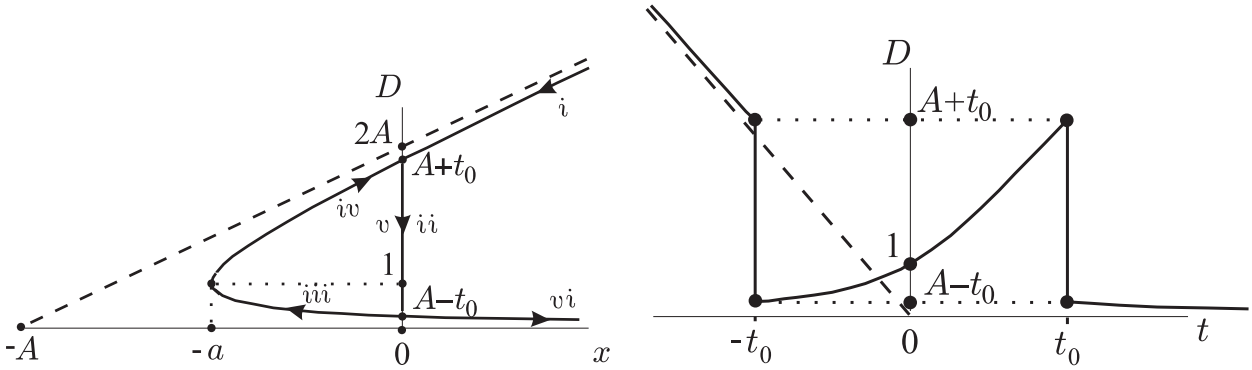
Fine, pri $D(t)$,

$$D_x(t) = \sqrt{1+t^2} - t\epsilon_x \ , \tag{17}$$

kie ϵ_x estas la signumo de x. Estas $\epsilon_x = +1$ kiam $t < -t_0$ kaj $t > t_0$, kaj estas $\epsilon_x = -1$ kiam $-t_0 < t < t_0$. Vidu figuron (5.b).

La nekontinueco ΔD de Dopplera faktoro D estas facile kalkulata ekde la antaŭaj rezultoj:

$$\Delta D = \sqrt{\frac{1+v_0}{1-v_0}} - \sqrt{\frac{1-v_0}{1+v_0}} = \frac{2v_0}{\sqrt{1-v_0^2}} = 2\sqrt{A^2-1} = 2\,\sinh\tau_0' = 2\,t_0 \ . \tag{18}$$



Figuro 5: Doppleraj faktoroj kun $b = 0$. **5.a)** D kiel funkcio (16) de la loko x de lum-eligo. Sagoj montras la pozitivan fluon de la tempo. Vidu la asimptoton $D = 2(x + A)$. Estas nekontinueco de D en $x = 0$. La valoro de τ_0' estas en (5).
5.b) D kiel funkcio (17) de t. Estos nekontinueco de D en lum-eligoj kiam $\mp t_0$, (5). Vidu asimptoton $D = -2t$. La valoro de τ_0' estas en (5).

4 Komentoj

Ni konsideris restantan observanton ĉe inercia sistemo S kaj moviĝantan fonton, kiel figuro (1.a). Ni montris, vidu figuron (3.a), ke lumo eligita el $x = 0$ (minimuma distanco al observanto, ĉe S) estas enigota ruĝ-delokigate. Tamen, en la antaŭa artikolo [1] (vidu ĝian figuron 1), kie la fonto restas ĉe inercia sistemo Σ kaj la observanto moviĝas, lumo enigita kiam la observanto estas en $x = 0$ estas vidata kun viol-delokigo. Tio malsamo estas natura en special-relativeco, kaj ni pliekspliko tion en estonta artikolo de revizio; vidu ankaŭ [3].

Ĉi tie ni vidis en figuroj (2.b) kaj (4.b), ke la observanto ricevas signalojn el la fonto nur poste sia finia propratempo $\tau = -A$. Ĉi tiu kontrastas kun ekvacioj (19) kaj (17) de [1], kiuj indikas ke la observanto ricevas signalojn je ĉiuj momentoj $-\infty < \tau < \infty$. La kialo de tiu malsameco estas, ke ĉe [1] la tempo τ estas propratempo de moviĝanta observanto, kvankam en ĉi tiu artikolo la tempo τ estas propratempo de restanta observanto. La fluoj de la du tempoj estas tre malsamaj.

En estonta artikolo ni prezentos sistemojn kies fonto kaj observanto ambaŭ estas akcelataj. Kelkaj el ĝiaj rezultoj estas mirindaj.

Citaĵoj

[1] F.M. Paiva kaj A.F.F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efekto ĉe unuforme akcelata movo – I*, `http://arxiv.org/abs/physics/0701092`

[2] B. Rothenstein et al., *Relativistic Doppler effect free of "plane wave" and "very high frequency" assumptions*, Apeiron **12** (2005) 122-135

[3] F. M. Paiva kaj A. F. F. Teixeira, *La relativeca tempo - I*, `http://arxiv.org/abs/physics/0603053`